doi:10.11887/j.cn.202204007 http://journal.nudt.edu.cn

满足线性二次型调节器性能指标的群系统编队跟踪问题优化控制方法*

王 琳,张庆杰,陈宏伟
(空军航空大学,吉林 长春 130022)

摘 要:针对群系统编队跟踪问题,提出一种满足线性二次型调节器性能指标的优化控制方法。建立编队跟踪问题的数学描述和设计编队跟踪控制协议。给出群系统实现编队跟踪的充要条件,借助李雅普诺夫第二方法分析系统的稳定性。得到了控制协议能够最小化线性二次型调节器性能指标的拓扑条件,设计了编队跟踪算法。仿真实验验证了控制方法的有效性。

关键词:群系统;编队跟踪;线性二次型调节器

中图分类号:V249 **文献标志码:**A **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

文章编号:1001-2486(2022)04-060-09

听语音 聊科研 与作者互动

Optimal control method for swarm systems formation tracking problem with linear quadratic regulator performance index

WANG Lin, ZHANG Qingjie, CHEN Hongwei
(Air Force Aviation University, Changchun 130022, China)

Abstract: For the formation tracking problem for swarm systems, an optimal control method with linear quadratic regulator performance index was put forward. Establish the mathematical description of the formation tracking problem and design a formation tracking control protocol. Necessary and sufficient conditions for swarm systems with formation tracking were obtained and the stability of the system was analysed by using the second method of Lyapunov. Topology conditions of the control protocol which can minimize linear quadratic regulator performance index were obtained and the formation tracking algorithm was designed. A numerical simulation was provided to illustrate the effectiveness of the control method.

Keywords: swarm systems; formation tracking; linear quadratic regulator

群系统编队控制问题[1-2]越来越受到学者的关注。传统的编队控制方法存在通信代价大,以及易单点失效导致整体瘫痪的缺点。伴随一致性理论的出现,为编队控制问题提供了新的解决思路。文献[3]证明了一致性编队控制方法可以解决编队控制问题,且优于传统编队控制方法。

文献[4]解决了一阶积分特性的群系统模型下的编队跟踪问题。文献[5]解决了二阶积分特性模型下的编队跟踪问题。文献[6]在假设含有有向生成树,且领导者须作为根节点的条件下,解决了二阶积分特性模型下的编队跟踪问题。文献[7]在通信拓扑图为无向图时,解决了编队控制问题。文献[8]在通信拓扑图为有向图时,解决了时变编队问题。文献[9]在通信拓扑图为有向图时,利用一致性方法,解决了无人机编队问题。文献[10]解决了高阶积分特性的群系统模型下的编队跟踪问题。文献[11]解决了最小化线性二次型调节器(linear quadratic regulator, LQR)性能指标的一阶积分特性模型下的编队问题。文献[12]研究了系统矩阵正定时领导者跟随者系统跟踪最优控制。文献[13]利用逆优化方法设计时变编队跟踪协议,给出群系统实现时变编队跟踪的可行性条件的证明,并保证所提出的控制策略满足LQR性能指标。

文献[4-6]的控制方法只适用于低阶积分特性模型,模型条件过于苛刻。文献[6]的控制方法针对的是领导者跟随者系统,其拓扑条件要求含有有向生成树且领导者须作为根节点,适用范围较窄。文献[7]要求通信拓扑图切换时均为无向图,针对有向拓扑条件,文献[7]的结论并不适用。文献[8-9]的通信拓扑图虽为有向图,但是解决的是编队形成问题,其结论不适用于编队

* 收稿日期:2021-11-02
基金项目:国防科技卓越青年基金资助项目(315090303)
作者简介:王琳(1998—),男,安徽宿州人,硕士研究生,E-mail:2517865877@qq.com;
张庆杰(通信作者),男,副教授,博士,硕士生导师,E-mail:nudtzhang@hotmail.com

跟踪问题。文献[10]考虑了高阶积分特性的编队跟踪问题,但是没有涉及编队跟踪性能方面。文献[11]考虑了最小化 LQR 性能指标的编队控制问题,针对的是低阶模型,且没有涉及跟踪轨迹方面。文献[12]对领导者跟随者系统达到跟踪最优控制的条件较为苛刻,要求系统矩阵正定,且不考虑时变编队和轨迹跟踪,应用范围较窄。文献[13]虽然在通信拓扑图为有向图时解决了编队跟踪问题,但跟踪轨迹的约束性强,其动态特性表达式要满足特定条件,不具有普遍性。在通信拓扑图为一般有向图且满足 LQR 性能指标的条件下,保证群系统编队跟踪的控制协议设计方法还比较少。

本文主要研究了一种针对群系统满足 LQR 指标的编队跟踪优化方法。

符号 $\mathbf{R}^{N\times N}$ 表示 $N\times N$ 维矩阵。$\boldsymbol{I}_N$ 是 $N\times N$ 维单位矩阵。$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$ 意味着 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是正定的,$\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$ 意味着 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是半正定的。$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的克罗内克积。

1　图论知识和相关引理

1.1　图论知识

图 $G=(V,\varepsilon,\boldsymbol{W})$ 中 V 是节点集合,ε 是边集合,$\boldsymbol{W}$ 是邻接矩阵。其中,$V=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N\}$,$\varepsilon=\{(\xi_i,\xi_j):\xi_i,\xi_j\in V\}$,$\boldsymbol{W}=[w_{ij}]\in\mathbf{R}^{N\times N}$。用 $e_{ij}=(\xi_i,\xi_j)$ 表示节点 ξ_i 延伸到节点 ξ_j 的边。如果对任意的 e_{ij} 都存在 $e_{ji}\in\varepsilon$,则图 G 是无向图。其他情况下,称图 G 是有向图。用 w_{ij} 表示边 e_{ji} 的连接权重。当 $w_{ij}>0$,节点 ξ_i 可以接收来自节点 ξ_j 的信息,而对 $i=\{1,2,\cdots,N\}$,有 $w_{ij}=0$。如果存在一个节点 ξ_i,可以传递信息到其他任意节点,则称图 G 含有一个有向生成树。定义节点 ξ_i 的邻居节点集合为 $N_i=\{\xi_j\in V:(\xi_j,\xi_i)\in\varepsilon\}$。定义节点 ξ_i 的入度为 $deg_{\text{in}}(\xi_i)$,则图的入度矩阵为 $\boldsymbol{D}=\text{diag}\{deg_{\text{in}}(\xi_1),deg_{\text{in}}(\xi_2),\cdots,deg_{\text{in}}(\xi_N)\}$。通常用 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W}$ 表示图 G 的拉普拉斯矩阵。

1.2　相关引理

引理 1[14]　有向图含有向生成树,则 0 是拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的单个特征值且 $L_1=0$,其他非零特征值均具有正实部。如果无向图含有向生成树,其他非零特征值均为正数。

引理 2[15]　如果矩阵 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{N\times N}$ 每一特征根均有正的实部,存在正定矩阵 $\boldsymbol{Q}>0$ 使得 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}>0$。

引理 3[16]　对于矩阵 $\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{L}$ 是图 G 的拉普拉斯矩阵,存在正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})>2\alpha\boldsymbol{Q}$$

其中,$0<\alpha<1$。

引理 4[17]　对于系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,t)\\ f(0,t)=0,\ \forall t\end{cases}$$

如果:

1)存在正定函数 $V(x,t)$;

2)$\dot{V}(x,t)$ 是负定函数。

则平衡状态 $x_{\mathrm{e}}=0$ 是渐近稳定的。

引理 5[18]　考虑连续时间线性定常系统

$$\dot{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

选取二次型性能指标函数

$$J=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为输入矩阵,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 可控且 $\boldsymbol{B}$ 是列满秩矩阵。$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 是第 i 个主体的状态,$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入。

选取加权阵 $\boldsymbol{Q}>0$ 和 $\boldsymbol{R}>0$,控制变量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$,其中,$\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 且 $\boldsymbol{P}>0$ 满足里卡蒂方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=0$。则反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使二次型性能指标函数 J 最小化且矩阵 $-\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}$ 是可对角化且正定的。

引理 6[19]　对于逆最优问题,反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 对于二次型性能指标函数 J 是最优的且 $\boldsymbol{P}>0$ 满足里卡蒂方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=0$$

$(\boldsymbol{Q}>0$ 和 $\boldsymbol{R}>0)$的条件是:

1)$-\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}$ 是可对角化且正定的,而且满足 $rank(\boldsymbol{K}\boldsymbol{B})=rank(\boldsymbol{K})$。即存在对称矩阵 $\boldsymbol{P}>0$ 和 $\boldsymbol{R}>0$ 使得 $\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$。

2)$\boldsymbol{K}$ 稳定到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的核空间。

2　问题描述

2.1　编队跟踪问题

考虑群系统满足如式(1)所示动态特性。

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i(t),i\in\{1,2,\cdots,N\}\tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{\xi}_i(t)\in\mathbf{R}^l$ 是第 i 个主体的状态,$\boldsymbol{u}_i(t)\in\mathbf{R}^m$ 是第 i 个主体的控制输入。

假设 1　$\boldsymbol{B}$ 是列满秩矩阵,通信拓扑图 G 包含有向生成树。

用 $\boldsymbol{h}(t)=[\boldsymbol{h}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{h}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{h}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{lN}$ 描述期望的编队队形,其中,$\boldsymbol{h}_i^{\mathrm{T}}(t),i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 连续可微。

定义 1　在控制输入 $\boldsymbol{u}_i(t)$ 下,群系统式(1)

的主体状态能够满足

$$\lim_{t\to\infty}[\boldsymbol{\xi}_i(t)-\boldsymbol{h}_i(t)-\boldsymbol{r}(t)]=0 \qquad (2)$$

式中，$\boldsymbol{r}(t)\in\mathbf{R}^l$ 为给定的轨迹，则称群系统式(1)能够形成时变编队 $\boldsymbol{h}(t)$，同时可以跟踪轨迹 $\boldsymbol{r}(t)$。

2.2 控制协议框架

基于一致性理论，考虑如下编队控制协议：

$$\boldsymbol{u}_i(t)=u_{i1}(t)+u_{i2}(t)+u_{i3}(t), i=1,2,\cdots N \qquad (3)$$

式中，$\boldsymbol{u}_{i1}(t)$ 为自身反馈控制输入，$\boldsymbol{u}_{i2}(t)$ 为辅助函数输入，$\boldsymbol{u}_{i3}(t)$ 为邻居反馈控制输入，其具体表达式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_{i1}(t)=\boldsymbol{K}_1[\boldsymbol{\xi}_i(t)-\boldsymbol{h}_i(t)-\boldsymbol{r}(t)]\\ \boldsymbol{u}_{i2}(t)=\boldsymbol{v}_i(t)\\ \boldsymbol{u}_{i3}(t)=\boldsymbol{K}_2\sum\limits_{j\in N_i}w_{ij}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_j(t)-\boldsymbol{h}_j(t)-\boldsymbol{r}(t)\\ -(\boldsymbol{\xi}_i(t)-\boldsymbol{h}_i(t)-\boldsymbol{r}(t))\end{bmatrix}\end{cases} \qquad (4)$$

其中，N_i 表示拓扑图 G 第 i 个节点的邻居集合，$\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 是待设计的增益矩阵，$\boldsymbol{v}_i(t)\in\mathbf{R}^m$ 是辅助函数。

3 问题分析和协议设计

3.1 充分必要条件

由定义 1 可知，群系统式(1)的主体状态与相应的时变编队和轨迹的差值需要收敛到零，才能实现编队跟踪，这样对编队跟踪控制协议的设计会有一定的限制条件，定理 1 给出了控制协议框架下群系统实现编队跟踪的充要条件。

定理 1 有界初始条件下，群系统式(1)通过 $\boldsymbol{u}_i(t)$ 的控制可以形成时变编队 $\boldsymbol{h}(t)$ 并跟踪轨迹 $\boldsymbol{r}(t)$ 的充分必要条件是：

1）对于控制函数 $\boldsymbol{v}_i(t)\in\mathbf{R}^m$ 有

$$(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_l)\dot{\boldsymbol{h}}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})\tilde{\boldsymbol{r}}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_l)\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)=0 \qquad (5)$$

2）如下系统是渐近稳定的

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)=[\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)-\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2]\boldsymbol{\zeta}(t) \qquad (6)$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{r}}(t)=[\boldsymbol{r}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{r}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{r}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$。

证明：将式(3)代入式(1)，并令

$$\boldsymbol{\xi}(t)=[\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{\xi}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{v}(t)=[\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{v}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

得到群系统的闭环方程为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=[\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)]\boldsymbol{\xi}(t)-(\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{\xi}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)\tilde{\boldsymbol{r}}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{h}(t)+(\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{h}(t) \qquad (7)$$

式中，$\boldsymbol{L}$ 为通信拓扑图 G 的拉普拉斯矩阵。令

$$\boldsymbol{\zeta}_i(t)=\boldsymbol{\xi}_i(t)-\boldsymbol{h}_i(t)-\boldsymbol{r}(t),\ i=1,2,\cdots,N$$

$$\boldsymbol{\zeta}(t)=[\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{\zeta}_N^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$$

则群系统式(7)可以转换为

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)=[\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)]\boldsymbol{\zeta}(t)-(\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{\zeta}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})\tilde{\boldsymbol{r}}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_l)\dot{\boldsymbol{h}}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_l)\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}(t) \qquad (8)$$

根据定义 1，如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{\zeta}(t)=0$，则群系统式(1)能够形成时变编队 $\boldsymbol{h}(t)$，同时可以跟踪轨迹 $\boldsymbol{r}(t)$。由式(8)可知，当

$$(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{h}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_l)\dot{\boldsymbol{h}}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})\tilde{\boldsymbol{r}}(t)-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{I}_l)\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)=0 \qquad (9)$$

且式(10)所示闭环系统是渐近稳定的，则群系统式(1)能够形成时变编队 $\boldsymbol{h}(t)$，同时可以跟踪轨迹 $\boldsymbol{r}(t)$。由式(9)可得到定理 1 的条件 1，由式(10)可得到定理 1 的条件 2。根据上述线性变换的证明过程，条件 1 和条件 2 是充分必要条件。

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)=[\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)-\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2]\boldsymbol{\zeta}(t) \qquad (10)$$

□

注 1：定理 1 的适用范围较广，不同于文献[20]，除了考虑群系统实现时变编队，还加以考虑跟踪轨迹。其控制函数 $v(t)$ 的引入是为了补偿时变编队 $\boldsymbol{h}(t)$ 和轨迹 $\boldsymbol{r}(t)$ 带来的多余项，将群系统式(1)转化为闭环自治系统，便于讨论系统的稳定性。其控制函数 $v(t)$ 可以通过式(5)求解得到，条件 1 较易满足。而条件 2 可通过李雅普诺夫稳定性理论予以证明，在理论证明中，难点在于闭环系统式(6)中增益矩阵 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 的设计方法，下面定理 2 给出了增益矩阵的设计方法。

3.2 稳定性分析

定理 2 有界初始条件下，如果 $\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，若 $\boldsymbol{K}_1=c\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{K}_2=-c\boldsymbol{K}$，$c$ 是增益常数，群系统式(1)在编队跟踪控制协议式(4)下能够实现时变编队并跟踪轨迹。

证明：考虑分段连续的李雅普诺夫函数

$$V=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes\boldsymbol{P})\boldsymbol{\zeta}(t) \qquad (11)$$

$\boldsymbol{P}$ 是里卡蒂方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=0$ 的正定解。V 是连续的，对其求导并将式(6)、$\boldsymbol{K}_1=c\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{K}_2=-c\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 代入式(11)可得

$$\dot{V}=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})]\boldsymbol{\zeta}(t)-c\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\{[(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\sigma]\otimes\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\}\boldsymbol{\zeta}(t)-c\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\{[\boldsymbol{Q}_\sigma(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})]\otimes\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\}\boldsymbol{\zeta}(t) \qquad (12)$$

由引理3得

$$(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\sigma+\boldsymbol{Q}_\sigma(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L}_{\sigma(t)})>2\alpha\boldsymbol{Q}_\sigma \tag{13}$$

则式(12)转换为

$$\dot{V}\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}-2c\alpha\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})]\boldsymbol{\zeta}(t) \tag{14}$$

由里卡蒂方程可得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=0 \tag{15}$$

则式(14)转换为

$$\dot{V}\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\{\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes[(1-2c\alpha)\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}]\}\boldsymbol{\zeta}(t) \tag{16}$$

令 $c=\dfrac{1}{2\alpha}$,则式(16)转换为

$$\dot{V}\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes(-\boldsymbol{Q})]\boldsymbol{\zeta}(t) \tag{17}$$

而 $-\boldsymbol{Q}<0$,则得到 $\dot{V}<0$,由 $\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes\boldsymbol{P}$ 是正定的可以得到函数 $V>0$,由引理4可知,闭环系统式(6)渐近稳定。意味着 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{\zeta}(t)=0$。

□

注2:由于跟踪控制协议式(4)包含了自身反馈控制输入,从式(12)~(16)判断,假设1并不是群系统实现时变编队和跟踪轨迹的必要条件,即使各主体之间不连通,时变编队和轨迹跟踪仍然可以实现。根据文献[16]可知,通信拓扑图中含有有向生成树,能够增强群系统的鲁棒性。

注3:在稳定性证明中,重点在于选取合适的李雅普诺夫函数 V,使得 $V>0$,其导数 $\dot{V}<0$。而本文通过构造正定的 $V=\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}_\sigma\otimes\boldsymbol{P})\boldsymbol{\zeta}(t)$ 和 $\boldsymbol{K}_1=c\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}_2=-c\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$,可以使得导数 $\dot{V}<0$,从而证明闭环系统式(6)是渐近稳定的。不同于文献[16],增益矩阵设计中引入了增益常数 c,通过调节增益常数 c 的大小,即可以调节收敛速度,而文献[16]想要调节收敛速度,须得出每个参数下的增益矩阵 $\boldsymbol{K}$,复杂度高,而本文得出里卡蒂方程下的正定解 $\boldsymbol{P}$,改变增益常数 c 的大小,就可改变收敛速度,复杂度降低。

在实际应用中,往往还需要考虑系统能否满足某种性能指标,下面定理3给出了编队跟踪控制协议式(4)可以最小化LQR性能指标的充分条件。

3.3　最优性分析

考虑如下LQR性能指标:

$$\bar{J}=\int_0^\infty(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v})\mathrm{d}t \tag{18}$$

式中,$\bar{\boldsymbol{Q}}=\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}>0,\bar{\boldsymbol{R}}=\bar{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}>0,\boldsymbol{v}=c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{K}\boldsymbol{\zeta}(t)$。

定理3　有界初始条件下,选取编队跟踪控制协议式(4)可以最小化LQR性能指标的充分条件是:矩阵 $\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L}$ 是可对角化且正定的。

证明:令 $\boldsymbol{K}_1=c\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}_2=-c\boldsymbol{K},\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$,代入式(10),得到全局误差动态特性

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)&=[\boldsymbol{I}_N\otimes(\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{BK})]\boldsymbol{\zeta}(t)+(c\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{BK})\boldsymbol{\zeta}(t)\\&=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}(t)+c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{BK}\boldsymbol{\zeta}(t)\\&=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{K}\boldsymbol{\zeta}(t)\\&=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{\zeta}(t)+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}\end{aligned} \tag{19}$$

由引理5可知,矩阵 $-\boldsymbol{KB}$ 是可对角化且正定的,而且满足 $rank(\boldsymbol{KB})=rank(\boldsymbol{K})$,则有

$$\begin{aligned}&rank\{[c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{K}](\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\}\\&=rank[c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})]rank(\boldsymbol{KB})\\&=rank[c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})]rank(\boldsymbol{K})\\&=rank[c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{K}]\end{aligned} \tag{20}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L}$ 是可对角化且正定的,则 $c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes-\boldsymbol{KB}$ 是可对角化且正定的。由引理6可知,全局误差动态特性式(19)对于二次型性能指标 $\bar{J}$ 是最优的。

$$\bar{J}=\int_0^\infty(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v})\mathrm{d}t$$

式中,$\bar{\boldsymbol{Q}}=\bar{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}>0,\bar{\boldsymbol{R}}=\bar{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}>0$。　□

根据以上分析,对于全局误差动态特性式(19),形式上的 $\bar{\boldsymbol{K}}=c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{K}$ 和矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有同样的形式。定义 $\boldsymbol{L}_\sigma=c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})$,可以得到

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{K}}&=c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\\&=-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{P})\end{aligned} \tag{21}$$

按照文献[21],如果 J^* 存在,则 $J^*=\min\int_0^\infty(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\cdot\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v})\mathrm{d}t=\boldsymbol{\zeta}(0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\zeta}(0)$,且 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 满足

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{Q}}-\bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{R}}^{-1}(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}+\\&\bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}=0\end{aligned} \tag{22}$$

令 $\bar{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{R}$ 和 $\bar{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{P}$,可以得到

$$\bar{\boldsymbol{Q}}:\bar{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{L}_\sigma^2-\boldsymbol{L}_\sigma)\otimes\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{Q} \tag{23}$$

得到 $\bar{\boldsymbol{Q}}$,即得到性能指标 $\bar{J}=\int_0^\infty(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v})\mathrm{d}t$ 中加权矩阵 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 的选取方法,也只有选取这样的 $\bar{\boldsymbol{Q}}$,编队跟踪控制协议式(4)才可以最小化性能指标。

注4:在满足条件式(5)和闭环系统式(6)渐近稳定的情况下,编队跟踪控制协议式(4)可以使群系统形成指定时变编队并跟踪轨迹,但不一定可以最小化二次型性能指标,通信拓扑还需满足特定条件,即 $\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L}$ 是可对角化且正定的,才可以实现最小化二次型性能指标。根据引理1,当拓扑图为无向图时,矩阵 $\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L}$ 是实对称矩阵,必

定可以对角化，且特征值都为正的实数，满足正定性。

注 5：传统最小化性能指标的方法，是先选定加权阵，确定性能指标之后，得出控制输入的最优形式，进而决定控制协议的设计结构。而传统方法大都是针对低阶积分特性模型，如文献[11]，或者不考虑时变编队和跟踪轨迹，如文献[12]。对于高阶群系统模型，考虑时变编队和跟踪轨迹的影响，选定性能指标之后，设计控制协议是十分困难的，基于此，本文设计的控制协议使得群系统转化为自治系统，通过变量代换，得到性能指标的加权阵，能够最小化性能指标。

4 数值仿真与分析

4.1 数值仿真条件

为验证编队控制方法，设置 8 个主体组成的三阶群系统。群系统模型中，每个主体由式(1)描述，其中系统矩阵为：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&1\\-2&4&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

图 1 给出了各主体之间的拓扑图。可以看出，图 1 中的拓扑图 G 包含有向生成树，G 相应的拉普拉斯矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&-1\\-1&1&0&0&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&0&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

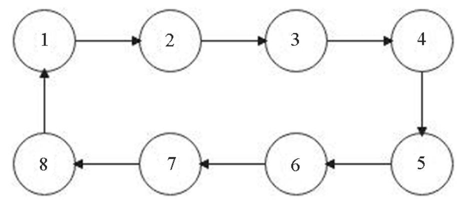


图 1 群系统各主体之间的通信拓扑图

Fig. 1 Communication topologies between agents of swarm systems

基于多无人机侦察任务场景，无人机须从不同角度侦察目标，以及被侦察目标轨迹会发生变化，定义时变编队 $\boldsymbol{h}(t)$ 和轨迹 $\boldsymbol{r}(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{h}_i(t)=\begin{bmatrix}5\sin(\omega t+0.25(i-1)\pi)\\5\cos(\omega t+0.25(i-1)\pi)\\5\sin(\omega t+0.25(i-1)\pi)\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,8$$

$$\boldsymbol{r}(t)=\begin{cases}[t\quad t\quad 0.5t]^{\mathrm T},0\leqslant t<30\\[t\quad t\quad 15]^{\mathrm T},30\leqslant t\leqslant 70\end{cases}$$

其中，$\omega=0.25$ rad/s。由式(5)可以得到控制函数 $v(t)$。

当 $0\leqslant t<30$ 时，

$$\boldsymbol{v}_i(t)=\begin{bmatrix}5\omega\cos[\omega t+0.25(i-1)\pi]+5\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]+1.5t+1\\-5\omega\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]-5\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]-0.5t+1\\5\omega\cos[\omega t+0.25(i-1)\pi]-15\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]-20\omega\cos[\omega t+0.25(i-1)\pi]-4.5t+0.5\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,8$$

当 $30\leqslant t\leqslant 70$ 时，

$$\boldsymbol{v}_i(t)=\begin{bmatrix}5\omega\cos[\omega t+0.25(i-1)\pi]+5\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]+2t-14\\-5\omega\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]-5\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]-14\\5\omega\cos[\omega t+0.25(i-1)\pi]-15\sin[\omega t+0.25(i-1)\pi]-20\omega\cos[\omega t+0.25(i-1)\pi]-2t-75\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,8$$

选取 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，可求得

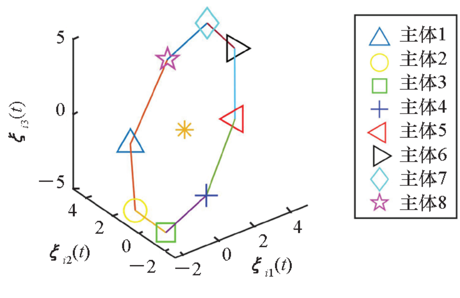
$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.7278&1.2367&1.8277\\1.2367&-3.8520&-4.7956\\1.8277&-4.7956&-7.3658\end{bmatrix}$$

取 $\alpha=0.5$，得 $c=1$。各主体的初始状态分别为：$x_{i1}(0)=4(\delta-0.5)$，$x_{i2}(0)=3(\delta-0.5)$，$x_{i3}(0)=2(\delta-0.5)$ $(i=1,2,\cdots,8)$。其中，δ 为 (0,1) 之间的随机数，设置仿真时间 70 s。

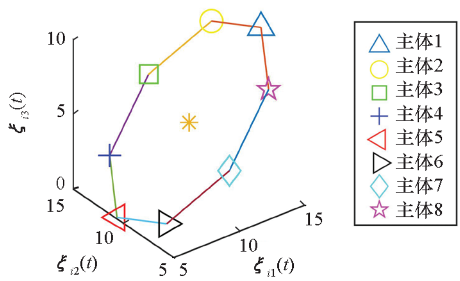
4.2 结果讨论与对比分析

4.2.1 结果讨论

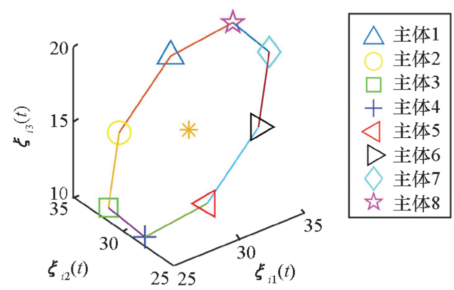
图 2 给出了 8 个主体的状态在 0.5 s、10 s、30 s、45 s、60 s 和 70 s 时的状态演化过程和编队构型。在初始阶段，8 个主体的构型为不规则图形，随着时间的推移，群系统的 8 个主体形成了指定的时变编队并可以保持稳定。



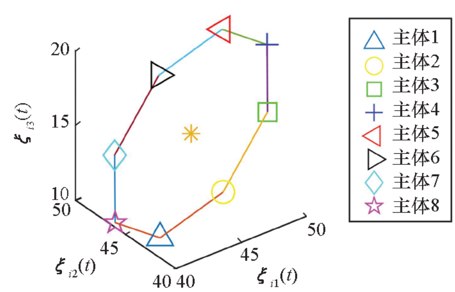
(a) $t = 0.5$ s



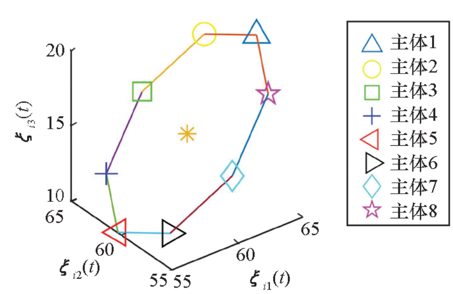
(b) $t = 10$ s



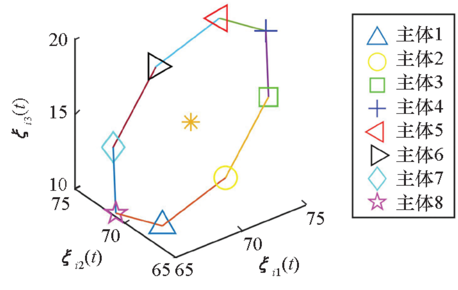
(c) $t = 30$ s



(d) $t = 45$ s



(e) $t = 60$ s

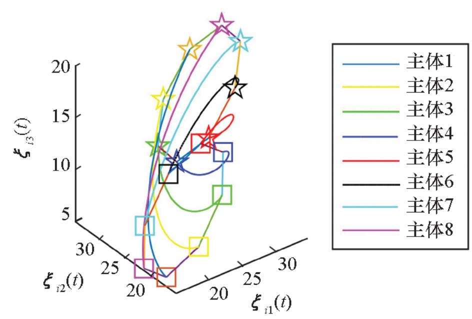


(f) $t = 70$ s

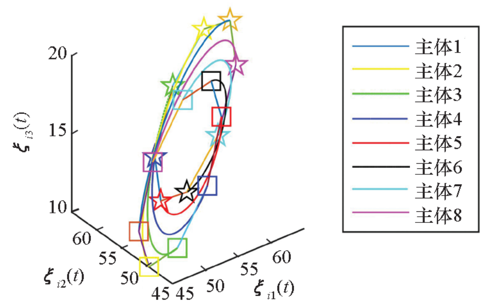
图 2　不同时刻群系统状态演化过程

Fig. 2　State evolution process of the swarm systems at different times

图 3 为 20 ~ 30 s 和 50 ~ 60 s 之间各主体的轨迹图，其中方框表示主体的起点，五角星表示主体的终点。在 20 ~ 30 s 和 50 ~ 60 s 的时间段里，8 个主体已经形成了规则的构型，并可以跟踪预先设定的轨迹。当轨迹发生变化时，群系统可以保持对轨迹的跟踪且编队的构型并没有受到影响。



(a) 20 ~ 30 s

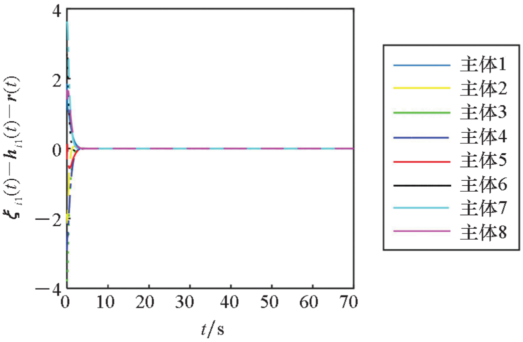


(b) 50 ~ 60 s

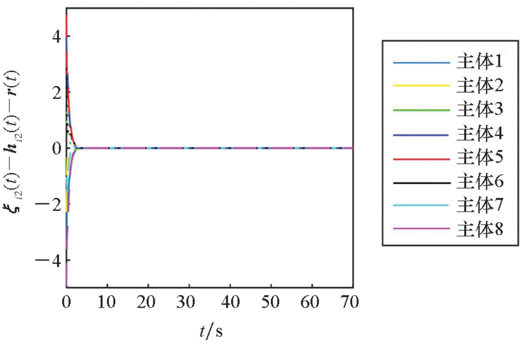
图 3　不同时间段的轨迹截图

Fig. 3　Snapshot of motion trajectories in different time

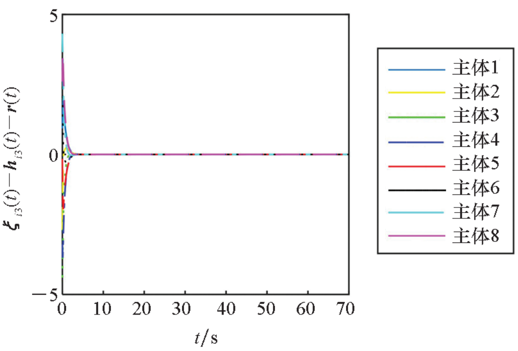
图 4(a) ~ (c)分别给出了编队跟踪误差在 3 个不同方向上的差值曲线。从图中不难看出，不同方向上编队跟踪误差都可以趋于零。说明各主体的三个状态与编队和轨迹相应状态的差值趋于零，这也说明群系统形成了指定的时变编队，并可以保持稳定。



(a) $\boldsymbol{\xi}_{i1}(t)-\boldsymbol{h}_{i1}(t)-\boldsymbol{r}(t)$



(b) $\boldsymbol{\xi}_{i2}(t)-\boldsymbol{h}_{i2}(t)-\boldsymbol{r}(t)$

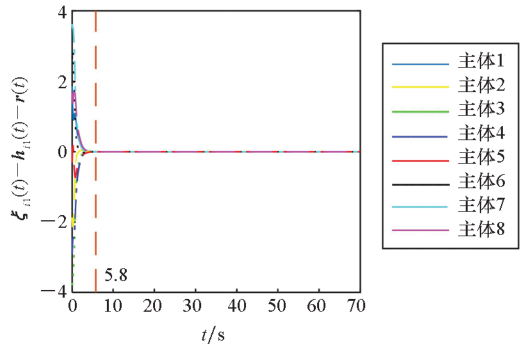


(c) $\boldsymbol{\xi}_{i3}(t)-\boldsymbol{h}_{i3}(t)-\boldsymbol{r}(t)$

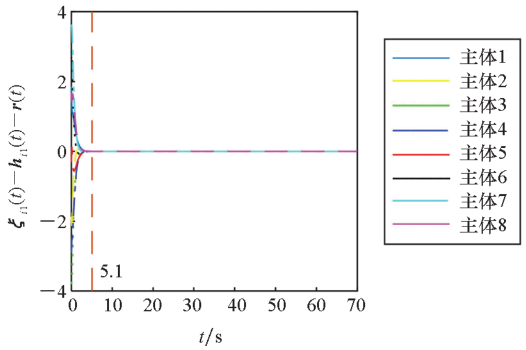
图 4 3 个不同方向上的编队跟踪误差

Fig. 4 Formation tracking errors in three different directions

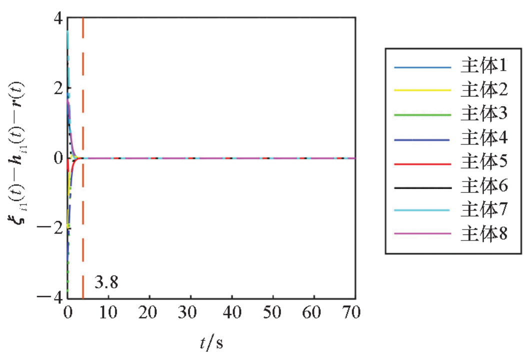
从增益常数 c 分析，随着增益常数 c 取值的不同，编队跟踪误差趋于零的时间长短不同，即群系统形成时变编队并跟踪轨迹的时间长短不同。以 x 方向为例，图 5(a) ~ (c)分别给出了增益常数 c 在取值为 0.6、1 和 2 时的编队跟踪误差曲线。这里认为差值小于 10^{-3}时，编队跟踪误差趋于零。图中竖直虚线表示差值趋于零的时间。可以看出随着增益常数 c 的增大，编队跟踪误差趋于零的时间越短。图 6(a) ~ (b)分别给出了增益常数 c 在取值为 0.6 和 2 时，8 个主体的状态在 0.5 s 时的状态截图，与图 2(a)中 c 取值为 1 对比，可以看出随着增益常数 c 的增大，8 个主体的状态在 0.5 s 时的编队构型越规则，也说明 8 个主体的编队形成速度越快。



(a) $c=0.6$



(b) $c=1$

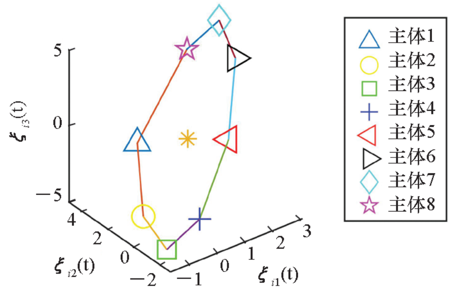


(c) $c=2$

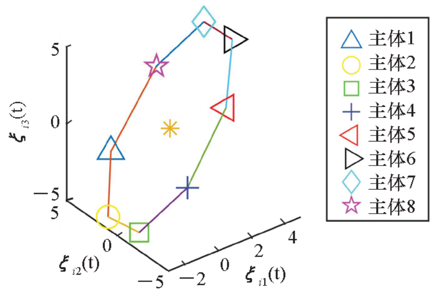
图 5 $\boldsymbol{\xi}_{i1}(t)-\boldsymbol{h}_{i1}(t)-\boldsymbol{r}(t)$在不同取值 c 的误差曲线

Fig. 5 The error curves of $\boldsymbol{\xi}_{i1}(t)-\boldsymbol{h}_{i1}(t)-\boldsymbol{r}(t)$ in different values of c

注 6：基于多无人机侦察任务场景，可以发现，当其中一个无人机可以感知到危险源时，需要联动整个无人机群系统突然改变方向。很明显这种情况下的无人机群系统不仅需要位置和速度的



(a) $t=0.5$ s, $c=0.6$



(b) $t=0.5$ s, $c=2$

图 6　群系统状态在 c 不同取值时的截图

Fig. 6　Snapshot of states of the swarm systems in different values of c

误差收敛于零，还要实现加速度的误差收敛于零，才可以实现更加精准的飞行。因此，针对高阶系统模型，设此仿真案例，以验证编队控制算法。

4.2.2　对比分析

为便于比较和考虑到控制协议最小化性能指标需要满足特定的拓扑条件，选取拓扑图为无向图，如图 7 所示。

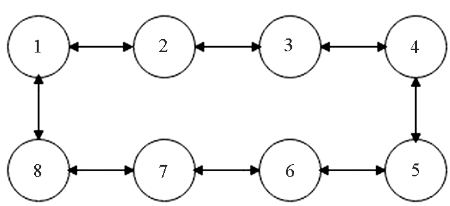


图 7　无向图

Fig. 7　Undirected graph

其他仿真条件采用本文的仿真条件。

从不同控制方法分析，编队跟踪误差趋于零的时间长短不同。以 x 方向为例，图 8 给出了文献[16]方法和本文方法下 x 方向的收敛时间。图中竖直虚线是增益常数 c 选取的边界，即参数 c 的选取要大于 0.5。利用文献[16]方法得到的增益矩阵，使得编队跟踪误差趋于零的时间为 6.3 s，而利用本文方法得到的增益矩阵，可以通过调节增益常数 c，改变编队跟踪误差趋于零的快慢。当 c 取 0.5 时，收敛时间为 6.3 s；当 c 取 5 时，收敛时间为 2.3 s。从图中可以看出，随着增益常数 c 的增大，收敛时间从 6.3 s 减小至 2.3 s，而相应的最小性能指标 J^* 越来越大，在实际应用中，可以综合考虑收敛时间与性能指标对系统的影响，适当选取增益常数 c。在实际应用中，基于多无人机侦察任务场景，当一个无人机收到被侦察目标的轨迹信息，需要无人机群系统迅速做出反应，为达到良好的侦察效果，无人机群系统需要迅速形成编队队形实施侦察任务，映射到仿真案例中，调节增益常数 c 的大小以改变编队的形成速度，从而适应侦察任务的需要。

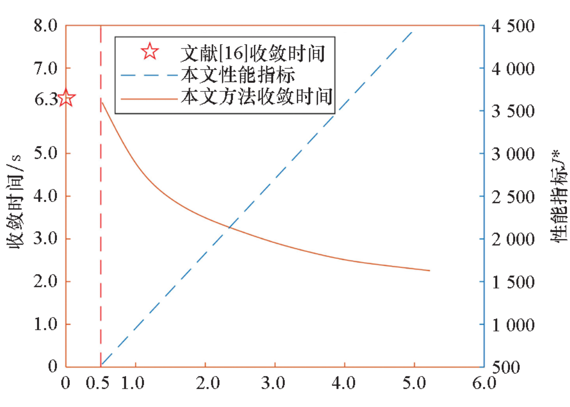


图 8　收敛时间和性能指标与参数 c 的关系

Fig. 8　Relationship between convergence time performance index and the parameter c

从性能指标分析，当选取的 LQR 指标取最小值，由 $J^* = \min\int_0^\infty(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{v})\mathrm{d}t = \boldsymbol{\zeta}(0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\zeta}(0)$ 看出，最小性能指标与初值和矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 有关，而 $\bar{\boldsymbol{P}} = c(\boldsymbol{I}_N+\boldsymbol{L})\otimes\boldsymbol{P}$。由此可见，最小性能指标与选取的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和增益常数 c 有直接关系，即除了编队跟踪控制协议最小化性能指标需要满足特定的通信拓扑条件外，增益常数 c 的选取关系着性能指标数值的大小。

5　结论

本文提出了一种满足 LQR 性能指标的群系统编队跟踪优化方法，结论为：

1）建立了编队跟踪问题数学描述，设计分布式控制协议框架，给出了编队跟踪的充要条件。

2）通过变量代换，将群系统编队跟踪控制问题转化为闭环系统的稳定性问题，并利用李雅普诺夫第二方法，分析闭环系统的稳定性。

3）给出了满足 LQR 性能指标下通信拓扑条件。

参考文献(References)

[1]　王祥科，陈浩，赵述龙．大规模固定翼无人机集群编队控制方法[J]．控制与决策，2021，36(9)：2063－2073．
WANG X K, CHEN H, ZHAO S L. Formation control of large-scale fixed-wing unmanned aerial vehicle swarms[J]. Control and Decision, 2021, 36(9): 2063－2073. (in Chinese)

[2]　XIE Y X, HAN L, DONG X W, et al. Bio-inspired adaptive formation tracking control for swarm systems with application to UAV swarm systems[J]. Neurocomputing, 2021, 453: 272－285.

[3]　REN W. Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations[J]. IET Control Theory & Applications,

2007, 1(2): 505 – 512.

[4] NIAN X H, SU S J, PAN H. Consensus tracking protocol and formation control of multi-agent systems with switching topology [J]. Journal of Central South University of Technology, 2011, 18(4): 1178 – 1183.

[5] YU J L, DONG X W, LI Q D, et al. Distributed adaptive cooperative time-varying formation tracking guidance for multiple aerial vehicles system[J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 117: 106925.

[6] DONG X W, LI Y F, LU C, et al. Time-varying formation tracking for UAV swarm systems with switching directed topologies[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(12): 3674 – 3685.

[7] DONG X W, ZHOU Y, REN Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies [J]. Control Engineering Practice, 2016, 46: 26 – 36.

[8] 赵学远, 周绍磊, 祁亚辉, 等. 有向切换拓扑下多智能体系统编队控制[J]. 计算机仿真, 2021, 38(1): 42 – 46.
ZHAO X Y, ZHOU S L, QI Y H, et al. Formation control of multi-agent system with directed switching topology [J]. Computer Simulation, 2021, 38(1): 42 – 46. (in Chinese)

[9] 刘伟, 周绍磊, 祁亚辉, 等. 有向切换通信拓扑下多无人机分布式编队控制[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(10): 1422 – 1427.
LIU W, ZHOU S L, QI Y H, et al. Distributed formation control for multiple unmanned aerial vehicles with directed switching communication topologies [J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(10): 1422 – 1427. (in Chinese)

[10] DONG X W, HU G Q. Time-varying formation tracking for linear multiagent systems with multiple leaders [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(7): 3658 – 3664.

[11] YU C B, WANG Y Q, SHAO J L. Optimization of formation for multi-agent systems based on LQR [J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2016, 17(2): 96 – 109.

[12] 姚蒙. 基于LQR的多智能体系统协同最优控制[D]. 广州: 华南理工大学, 2016.
YAO M. Optimal cooperative control for multi-agent systems based on LQR theory [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2016. (in Chinese)

[13] HU J Y, LANZON A. Cooperative adaptive time-varying formation tracking for multi-agent systems with LQR performance index and switching directed topologies[C]// Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, 2018.

[14] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655 – 661.

[15] CHEN C T. Linear system theory and design[M]. New York: Oxford University Press, Inc., 1998.

[16] 周绍磊, 祁亚辉, 张雷, 等. 切换拓扑下无人机集群系统时变编队控制[J]. 航空学报, 2017, 38(4): 264 – 272.
ZHOU S L, QI Y H, ZHANG L, et al. Time-varying formation control of UAV swarm systems with switching topologies [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2017, 38(4): 264 – 272. (in Chinese)

[17] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2002.
ZHENG D Z. Linear system theory [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002. (in Chinese)

[18] ZHANG H G, FENG T, YANG G H, et al. Distributed cooperative optimal control for multiagent systems on directed graphs: an inverse optimal approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(7): 1315 – 1326.

[19] LI Z H, DING Z T. Fully distributed adaptive consensus control of multi-agent systems with LQR performance index[C]//Proceedings of 54th IEEE Conference on Decision and Control, 2015.

[20] 石晓航, 张庆杰, 吕俊伟. 复杂通信条件下的线性群系统编队控制方法[J]. 信息与控制, 2018, 47(3): 297 – 305.
SHI X H, ZHANG Q J, LYU J W. Formation control for linear swarm systems with complex communication conditions[J]. Information and Control, 2018, 47(3): 297 – 305. (in Chinese)

[21] ANDERSON B D O, MOORE J B. Optimal control: linear quadratic methods [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1990.