doi:10.11887/j.cn.202302020

http://journal. nudt. edu. cn

## 高空风场条件风速概率分布与正态分布差异分析。

王 乐,常汉江,蔡毅鹏 (中国运载火箭技术研究院,北京 100076)

摘 要:在飞行器多学科优化设计中,高空风场是有重要影响的不确定性因素,需要准确获取其统计特性。高空风场条件风速的概率分布是特定的,为了便于将高空风场概率模型用于不确定性设计,减少计算量,提出了高空风场条件风速概率分布与正态分布差异的分析方法,给出了将高空风场条件风速概率分布简化为正态分布的适用条件。数值仿真结果表明:在纬度为 24.3°N ~42.2°N 范围内,不同地区高空风场条件风速概率密度与正态分布概率密度的差异在海拔 2 ~30 km 范围内呈喇叭形分布,在海拔 15 km 附近,高空风场条件风速概率密度与正态分布概率密度最接近,高空风场条件风速的概率分布可近似假设为正态分布。综合以上工作,给出了在飞行器不确定性设计中考虑条件风速不确定性时,生成随机样本方法的选择建议。

关键词:风矢量;不确定性;概率密度;正态分布

中图分类号: V11 文献标志码: A 文章编号: 1001 - 2486 (2023) 02 - 172 - 07

# Analysis of the difference between probability distribution of conditional aloft wind speed and normal distribution

WANG Le, CHANG Hanjiang, CAI Yipeng

(China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: As an important uncertainty factor in multidisciplinary optimization design of aerocraft, the statistical characteristics of aloft wind should be acquired accurately. The probability distribution of conditional aloft wind speed is unique, in order to facilitate the use of probability model of aloft wind for uncertainty design and reduce the amount of calculation, an analysis method of difference between probability distribution of conditional aloft wind speed and normal distribution was proposed, and the applicable condition for simplifying the distribution of probability distribution of conditional aloft wind speed to normal distribution was given. Numerical simulation results show that within latitude range of 24.  $3^{\circ}$ N ~ 42.  $2^{\circ}$ N, the difference between condition aloft wind speed probability density and normal distribution probability density in different regions is trumpet-shaped in the range of  $2 \sim 30$  km above sea level, and the conditional aloft wind speed probability density is closest to that of normal distribution nearby the altitude of 15 km, which can be approximately assumed to be normally distributed. Based on the above work, suggestions were given for selecting the method of generating random samples when considering the uncertainty of the conditional aloft wind speed in the uncertainty design of aerocraft.

Keywords: wind vector; uncertainty; probability density; normal distribution

高空风场会改变飞行器的攻角,进而改变作 用在飞行器上的分布气动力,产生附加的干扰力 和力矩,对飞行器的飞行载荷、弹道和姿态等产生 影响<sup>[1-2]</sup>。为减小飞行器在飞行中由于高空风场 产生的载荷,改善飞行器的飞行环境,cheng 等提 出了基于粒子群优化算法的高空风弹道修正技 术,可减小飞行器的法向风载<sup>[3]</sup>。近年来,随着 运载火箭轻质化的发展,对箭体结构的承载能力 提出了更高的要求,为降低高空风对飞行载荷的 影响,在火箭设计中引入了主动载荷控制 技术<sup>[4]</sup>。 在飞行器设计中,不确定性建模方法可提高 系统可靠性,降低系统风险,因此得到大量使用。 不确定性设计需要考虑各种不确定性因素,对于 统计数据充足的设计变量的不确定性,通常基于 概率方法进行建模<sup>[5]</sup>。高空风场对飞行器的性 能有重要影响,需要准确获取其统计特征,并联合 发动机推力偏差、质量偏差、气动偏差等多种不确 定性因素进行优化设计。

Smith 于 1976 年提出的矢量风剖面模型已经 在国内外高空风场设计中得到广泛应用<sup>[6]</sup>,采用 该模型可以获取指定高度的最多风向,以及最多 风向条件下具有一定出现概率的最大高空风场条 件风速(以下简称条件风速)。将各高度的最大 风矢量及相应的最大风切变随高度的变化综合起 来,形成综合矢量风剖面<sup>[7]</sup>。Adelfang 等对矢量 风剖面模型进行了改进,取消了不同高度之间经 向风速与纬向风速相关系数为零的假设,提出了 基于条件风矢量的矢量风剖面模型[8-11]。由以 上模型可以推导出条件风速的概率密度、数学期 望和标准偏差等统计特征量的计算方法。飞行器 不确定性设计中引入了多个概率模型,往往需要 开展大量的统计模拟,与不确定性建模中常用的 正态、对数、指数分布等模型不同,高空风场条件 风速的概率分布是特定的,为了便于将高空风场 概率模型用于不确定性设计,减少计算量,本文研 究将条件风速概率分布简化为正态分布的适用条 件,提出了条件风速概率分布与正态分布差异的 分析方法。

#### 1 条件风速的统计特征

条件风速的纬向分量 *u* 和经向分量 *v* 服从二 维正态分布<sup>[11]</sup>,其概率密度为:

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\left(\frac{u-\bar{u}}{\sigma_u}\right)^2 - 2\rho \frac{(u-\bar{u})(v-\bar{v})}{\sigma_u\sigma_v} + \left(\frac{v-\bar{v}}{\sigma_v}\right)^2\right]\right\}$$
(1)

式中, $\sigma_u$ 为风速纬向分量的标准偏差, $\sigma_v$ 为风速 经向分量的标准偏差, $\overline{u}$ 为风速纬向分量的数学 期望, $\overline{v}$ 为风速经向分量的数学期望, $\rho$ 为风速纬 向分量和经向分量的相关系数。

设风速的大小为 w,风向角为 α,则有:

$$\begin{cases} u = w \cos \alpha \\ v = w \sin \alpha \end{cases}$$
(2)

将式(2)代入式(1),可得风速 w 和风向角  $\alpha$  的联合分布概率密度为:

$$g(w,\alpha) = \frac{w}{2\pi\sigma_{u}\sigma_{v} \sqrt{1-\rho^{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(a^{2}w^{2}-2bw+c^{2})\right]$$
(3)

式中,a,b和c为中间参数,其表达式为:

$$\begin{cases} a^{2} = \frac{1}{(1-\rho^{2})} \left( \frac{\cos^{2}\alpha}{\sigma_{u}^{2}} + \frac{\sin^{2}\alpha}{\sigma_{v}^{2}} - 2\rho \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sigma_{u}\sigma_{v}} \right) \\ 2b = \frac{1}{(1-\rho^{2})} \left( \frac{2\overline{u}\cos\alpha}{\sigma_{u}^{2}} + \frac{2\overline{v}\sin\alpha}{\sigma_{v}^{2}} - 2\rho \frac{\overline{u}\sin\alpha + \overline{v}\cos\alpha}{\sigma_{u}\sigma_{v}} \right) \\ c^{2} = \frac{1}{(1-\rho^{2})} \left( \frac{\overline{u}^{2}}{\sigma_{u}^{2}} + \frac{\overline{v}^{2}}{\sigma_{v}^{2}} - 2\rho \frac{\overline{u}}{\sigma_{u}\sigma_{v}} \right) \end{cases}$$

由 g(w,α)可得风向角的概率密度为:

$$g_{1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi\sigma_{u}\sigma_{v}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^{2}}} \frac{1}{a^{2}} e^{-\frac{1}{2}c^{2}} \cdot \left[1 + \sqrt{2\pi} \frac{b}{a} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2}} \varphi\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$
(5)

其中:

$$\varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b}{a}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$
 (6)

设风向概率密度最大的风向角为 $\alpha_0$ ,称为最 多风向,在已知 $\alpha_0$ 的条件下,由式(3)和式(5)可得,风速条件分布的概率密度为:

$$g_{2}(w \mid \alpha_{0}) = \frac{a_{0}^{2}}{1 + \sqrt{2\pi} \frac{b_{0}}{a_{0}} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{b_{0}}{a_{0}}\right)^{2}} \varphi\left(\frac{b_{0}}{a_{0}}\right)^{w}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(a_{0}^{2} w^{2} - 2b_{0} w\right)\right]$$
(7)

则在已知风向角 $\alpha_0$ 的条件下,不超过最大条件风速 $w^*$ 的概率为:

$$P_{w} \{ w \leq w^{*} | a = a_{0} \} = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}w_{s}^{2}} + \frac{b_{0}}{a_{0}}\sqrt{2\pi} [1 - \varphi(w_{s})]}{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{0}}{a_{0}}\right)^{2}} + \sqrt{2\pi}\frac{b_{0}}{a_{0}}\varphi\left(\frac{b_{0}}{a_{0}}\right)}$$
(8)

式中, $w_s = a_0 w^* - b_0 / a_0$ 。

根据式(8)可以由最大风速的出现概率  $P_w$ 反求  $w^*$ 。由式(7)可得条件风速的数学期望为:  $E(w \mid \alpha_0) = c_1 \frac{1}{a_0^3} \left[ \frac{b_0}{a_0} + \left( \frac{b_0^2}{a_0^2} + 1 \right) e^{\frac{1}{2} \left( \frac{b_0}{a_0} \right)^2} \sqrt{2\pi} \varphi \left( \frac{b_0}{a_0} \right) \right]$ (9)

其中:

其中:

 $c_{1} = \frac{a_{0}^{2}}{1 + \sqrt{2\pi} \frac{b_{0}}{a_{0}} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{b_{0}}{a_{0}}\right)^{2}} \varphi\left(\frac{b_{0}}{a_{0}}\right)}$ (10)

由式(7)和式(9)可得,条件风速的标准偏 差为:

$$\sigma(w \mid \alpha_0) = \sqrt{c_2 - c_3} \tag{11}$$

$$c_{2} = \frac{c_{1}}{a_{0}^{4}} \Big[ 2 + \frac{b_{0}^{2}}{a_{0}^{2}} + b_{0} \Big( \frac{b_{0}^{2}}{a_{0}^{2}} + 3 \Big) \frac{1}{a_{0}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \left( \frac{b_{0}}{a_{0}} \right)^{2}} \sqrt{2\pi} \varphi \Big( \frac{b_{0}}{a_{0}} \Big) \Big]$$
(12)

$$c_{3} = \left\{ c_{1} \frac{1}{a_{0}^{3}} \left[ \frac{b_{0}}{a_{0}} + \left( \frac{b_{0}^{2}}{a_{0}^{2}} + 1 \right) e^{\frac{1}{2} \left( \frac{b_{0}}{a_{0}} \right)^{2}} \sqrt{2\pi} \varphi \left( \frac{b_{0}}{a_{0}} \right) \right] \right\}^{2}$$
(13)

## 2 条件风速的概率分布与正态分布的差异 的量化表征

由式(7)和式(8)可知,条件风速的概率分布

是特定的,为方便实际工程应用,研究将条件风速 概率分布简化为正态分布的适用条件。假设条件 风速服从一维正态分布,根据式(9)和式(11),可 得基于条件风速数学期望和标准偏差的一维正态 分布概率密度为:

$$g_{n}(w \mid \alpha_{0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(w \mid \alpha_{0})} \exp\left\{-\frac{\left[w - E(w \mid \alpha_{0})\right]^{2}}{2\sigma^{2}(w \mid \alpha_{0})}\right\}$$
(14)

由式(14)可求得:

$$P_{w} \{ w \leq w^{*} | a = a_{0} \} = \varphi \Big[ \frac{w^{*} - E(w | \alpha_{0})}{\sigma(w | \alpha_{0})} \Big]$$
(15)

根据不同条件风速概率及对应最大风速结 果,由式(15)可反求条件风速数学期望  $E_n(w|\alpha_0)$ 和标准偏差 $\sigma_n(w|\alpha_0)$ 。设  $P_w \{w \le w^* | a = a_0 \} = 95\%$ 时的最大风速为 $w_{0.95}^*$ ,  $P_w \{w \le w^* | a = a_0 \} = 99\%$ 时的最大风速为 $w_{0.99}^*$ , 查询标准正态分布表,可得:

$$\begin{cases} w_{0.95}^* = E_n(w \mid \alpha_0) + 1.65\sigma_n(w \mid \alpha_0) \\ w_{0.99}^* = E_n(w \mid \alpha_0) + 2.33\sigma_n(w \mid \alpha_0) \end{cases}$$
(16)

 $w_{0.95}^*$ 和  $w_{0.99}^*$ 由式(8)可求得,由式(16)可以 计算出  $E_n(w | \alpha_0)$ 和  $\sigma_n(w | \alpha_0)$ 。设  $g_2(w | \alpha_0)$ 与  $g_n(w | \alpha_0)$ 之间的偏差为  $d_g$ ,  $E_n(w | \alpha_0)$ 相对于  $E(w | \alpha_0)$ 的误差为  $d_E$ ,  $\sigma_n(w | \alpha_0)$ 相对于  $\sigma(w | \alpha_0)$ 的误差为  $d_\sigma$ 。实际计算条件风速的概率 密度时风速是离散的,则不同风速下的  $g_2(w | \alpha_0)$ 和  $g_n(w | \alpha_0)$ 构成向量,设  $g_2 = [g_{21} g_{22} \cdots g_{2m}]^T$ ,  $g_n = [g_{n1} g_{n2} \cdots g_{nm}]^T$ , m 是风速的个数。设向量  $g_2$  各元 素的最大值为  $g_{max}$ , 定义  $g_2(w | \alpha_0)$ 与  $g_n(w | \alpha_0)$ 之间 的偏差为:

$$d_{g} = k \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{g_{2j}}{g_{\max}} - \frac{g_{nj}}{g_{\max}}\right)^{2}}$$
(17)

式中,k是常系数,各个高度取值相同。 将 $d_{F}$ 和 $d_{z}$ 定义为:

$$\begin{cases} d_E = E_n(w \mid \alpha_0) / E(w \mid \alpha_0) - 1 \\ d_\sigma = \sigma_n(w \mid \alpha_0) / \sigma(w \mid \alpha_0) - 1 \end{cases}$$
(18)

#### 3 算例

以某地气象站积累的高空风场实测数据为依据,计算海拔2~30 km 范围各高度最多风向下出现概率为95%和99%的最大风速 w<sup>\*</sup><sub>0.95</sub>和 w<sup>\*</sup><sub>0.99</sub>,结果见图 1。

由式(9)和式(11)计算的各高度最多风向下的条件风速数学期望和标准偏差见图2和图3。





Fig. 1 The maximum conditional aloft wind speed with 95% and 99% probability of occurrence at various altitudes in the wind direction with the highest probability density





the highest probability density





Fig. 3 Standard deviation of conditional aloft wind speed at various altitudes in the wind direction with the highest probability density

典型高度的条件风速概率密度与一维正态分

布假设下概率密度的对比见图4。由图4可知, 一维正态分布的概率密度是以数学期望为中心, 呈现对称形状,而条件风速的概率密度不是严格 对称的。当条件风速数学期望较小时,条件风速





Fig. 4 Comparison of the probability density of conditional aloft wind speed and the probability density under the assumption of one-dimensional normal distribution 的概率密度与正态分布的概率密度差异较大。 15 km海拔的条件风速概率密度与一维正态分布 假设下的概率密度几乎一致,2 km 和 28 km 海拔 的概率密度差异明显。

由式(8)可知,条件风速的累积分布函数是 不可逆的,因此不能直接用数学方法生成服从如 式(7)所示概率分布的随机样本,需采用模拟方 法进行近似。而当条件风速的概率密度与正态分 布概率密度接近时,可直接生成正态分布的随机 样本。以图4(b)中海拔15 km条件风速概率密 度为例,采用舍选法<sup>[12]</sup>(acceptance-rejection method, ARM)生成服从该条件风速概率分布的 随机样本,计算步骤如下:

**步骤1:**选取需要生成随机样本的风速范围 [*w*<sub>min</sub>,*w*<sub>max</sub>];

**步骤 2:**获取条件风速概率密度的最大值 f<sub>0</sub>; **步骤 3:**生成服从均匀分布的随机数 X ~ U[w<sub>min</sub>,w<sub>max</sub>];

**步骤4:**生成服从均匀分布的另一随机数 *Y*~U[0,1],*X*和 *Y*相互独立;

步骤 5: 进行样本筛选, 若  $Y_0 \leq g_2(X)$ , 则选 取 X;

步骤6:若未达到样本数量要求,重复步骤3~5。

此外,用高效的 ziggurat 方法<sup>[13]</sup>生成服从正态分布的随机样本。计算使用 Intel 四核处理器, 两种方法的计算效率对比见表1。

#### 表1 两种方法生成随机样本的计算效率比较

Tab. 1 Comparison of calculation efficiency of two methods for generating random samples

ARM 抽样 次数	ARM 选取 样本 数	ARM 接受 概率/ %	ARM 运行 时间/ s	ziggurat 法样 本数	ziggurat 法运行时 间/s
10 000	1 833	18.3	1.022 6	1 833	5.447 $6 \times 10^{-5}$
50 000	9 350	18.7	4.777 9	9 350	1.349 3 × 10 <sup>-4</sup>
100 000	18 593	18.6	9.320 0	18 593	$2.519 \ 9 \times 10^{-4}$

由表1可见,不同抽样次数下,采用ARM筛 选有效样本的接受概率不超过19%,生成相同数 量随机样本的运行时间比生成正态分布随机样本 的 ziggurat 法高4个数量级。采用核密度估计方 法对两种方法生成的随机样本概率密度进行估 计,并与该高度条件风速概率密度函数的精确值 进行对比,当ARM 抽样次数为50000时的结果





Fig. 5 Comparison of probability density estimation results of random samples generated by two methods at an altitude of 15 km and conditional aloft wind speed probability density

由图 5 可见,当条件风速的概率密度与正态 分布概率密度接近时,用 ziggurat 法生成的正态分 布随机样本概率密度估计结果和 ARM 生成的随 机样本概率密度估计结果与该高度的条件风速概 率密度吻合,两种方法生成的随机样本概率密度 都具有较高的精度。而用 ziggurat 法生成随机样 本的时间远少于 ARM。

在海拔28 km 用两种方法生成的随机样本概 率密度估计结果与条件风速概率密度的对比见 图 6。





Fig. 6 Comparison of probability density estimation results of random samples generated by two methods at an altitude of 28 km and conditional aloft wind speed probability density

由图 6 可见,当条件风速的概率分布与正态 分布的差异明显时,用 ARM 生成的随机样本概 率密度精度较高,基于正态分布假设用 ziggurat 法 生成的随机样本概率密度精度低于 ARM。 根据图 1 中最多风向下出现概率为 95% 和 99% 的最大风速  $w_{0.95}^*$  和  $w_{0.99}^*$  的计算结果,由 式(16) 可以反求各高度条件风速数学期望  $E_n(w|\alpha_0)$ 和标准偏差 $\sigma_n(w|\alpha_0)$ ,将结果分别与 图 2 和图 3 中的 $E(w|\alpha_0)$  和 $\sigma(w|\alpha_0)$ 进行比 较,用式(17)和式(18)计算了两种概率密度的差 异和反求的条件风速数学期望和标准偏差的相对 误差,结果见图 7 和图 8。





Fig. 7 Contrast between the inversely solved mathematical expectation error of conditional aloft wind speed and the difference of probability density



### 图 8 反求的条件风速标准偏差的误差与概率密度差异对比 Fig. 8 Contrast between the inversely solved standard deviation error of conditional aloft wind speed and the difference of probability density

由图 7 和图 8 可知,由条件最大风速反求的 条件风速数学期望和标准偏差的相对误差随高度 的变化呈现喇叭形,条件风速的数学期望偏小,而 条件风速的标准偏差在多数高度偏大。条件风速 概率密度与正态分布概率密度的差异随海拔变 化,在海拔 13~19 km 范围内,两种概率密度差异 最小,条件风速的概率分布与一维正态分布概率 密度最接近,距离该高度范围越远误差越大,同时 假设的条件风速一维正态分布概率密度与条件风 速概率密度的偏差越大。条件风速数学期望的相 对误差绝对值最大为14%,条件风速标准偏差的 相对误差绝对值最大为23%。在海拔13~19 km 范围内,按照正态分布假设反算的条件风速的数 学期望和标准偏差的相对误差不超过3.5%。

为了研究不同地区各高度条件风速概率密度 与正态分布概率密度的差异,选取纬度为 24.3°N~ 42.2°N的 5 个地区进行计算,结果见图 9。





Fig. 9 Difference between the conditional aloft wind speed probability density and the normal distribution probability density in different regions

由图9可见,在纬度24.3°N~42.2°N范围 内,不同地区条件风速概率密度与正态分布概率 密度的差异在海拔2~30 km范围内各不相同,但 整体仍呈喇叭形分布。在海拔15 km附近条件风 速概率密度与正态分布概率密度最接近,其概率 分布可近似假设为正态分布。

综合以上分析,在飞行器不确定性设计中,当 考虑条件风速不确定性,需要反复生成大量的条 件风速随机样本时,建议在生成样本前,采用本文 提出的条件风速概率分布与正态分布差异的分析 方法,给出将条件风速概率分布简化为正态分布 的适用条件。满足不同区域适用条件的高度范围 可能不一致,建议以各区域实测的风场数据进行 验证,确保对不同区域的适用性。对于每个区域 满足简化为正态分布适用条件的高度范围,建议 直接生成正态分布的随机样本;对于不满足的高 度范围,建议使用模拟方法生成接近条件风速概 率分布的随机样本,这样既保证了生成的条件风 速随机样本概率分布的高精度,又提高了生成随 机样本的效率。

#### 4 结论

 1)风速的纬向分量和经向分量服从二维正态分布。分析了高空风场条件风速的统计特征, 给出了高空风场在最多风向条件下风速概率密度、数学期望和标准偏差的计算方法。

2)给出了条件风速的概率分布与正态分布 差异的分析方法。假设条件风速服从一维正态分 布,给出了基于条件风速数学期望和标准偏差的 一维正态分布概率密度函数,采用最多风向下出 现概率为95%和99%的最大风速计算结果,反求 各高度条件风速数学期望和标准偏差,定义了条 件风速概率密度与条件风速正态分布假设下概率 密度的偏差量,以及正态分布假设下反求的条件 风速数学期望和标准偏差的相对误差。

3)在纬度为 24.3°N~42.2°N 范围内,不同 地区条件风速概率密度与正态分布概率密度的差 异在海拔 2~30 km 范围内呈喇叭形分布,在海拔 15 km 附近条件风速概率密度与正态分布概率密 度最接近,条件风速的概率分布可近似假设为正 态分布。

4) 对比了采用 ARM 与 ziggurat 法生成某地 区不同高度条件风速随机样本的计算效率和精 度,给出了在飞行器不确定性设计中考虑条件 风速不确定性时,生成随机样本方法的选择 建议。

#### 参考文献(References)

- [1] 王建明,林娜,张博戎. 某大型低温火箭高空风载荷分析[J]. 导弹与航天运载技术, 2021(5):137-141.
   WANG J M, LIN N, ZHANG B R. Analysis on flight wind-load for large cryogenic rocket [J]. Missiles and Space Vehicles, 2021(5):137-141. (in Chinese)
- [2] 程胡华,李娟,肖云清,等.风偏差对火箭最大气动载荷 精度的影响[J].北京航空航天大学学报,2021, 47(10):2034-2042.
  CHENG H H, LI J, XIAO Y Q, et al. Influence of wind deviation on rocket maximum aerodynamic load accuracy[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2021,47(10):2034-2042.(in Chinese)
- [3] CHENG G H, JING W X, XU Y N, et al. Ballistic correction technology for high altitude wind based on particle swarm optimization algorithm [ J ]. Missiles and Space Vehicles, 2022(5): 62-68.
- [4] 潘豪,冯昊,李新明,等. 运载火箭自适应减载控制技术[J].导弹与航天运载技术,2019(2):58-61,88.
  PAN H, FENG H, LI X M, et al. Adaptive control technology of load-relief for launch vehicle[J]. Missiles and Space Vehicles, 2019(2):58-61,88. (in Chinese)

- [5] 吕艳,刘百奇,尹世明.基于不确定性的内外弹道联合优 化方法[J]. 战术导弹技术,2018(2):56-59,101.
  LYU Y, LIU B Q, YIN S M. An optimum method for internal and external ballistic design based on uncertainty [J]. Tactical Missile Technology, 2018(2):56-59,101.(in Chinese)
- [6] SMITH O E. Vector wind and vector wind shear models 0 to 27 km altitude for Cape Kennedy, Florida, and Vandenberg AFB, California[R]. Alabama; NASA Marshall Space Flight Center, 1976.
- [7] 赵人濂,陈振官,付维贤.风切变与运载火箭设计[J]. 宇航学报,1998,19(2):105-108.
  ZHAO R L, CHEN Z G, FU W X. Wind shear and rocket design[J]. Journal of Astronautics, 1998, 19(2):105-108. (in Chinese)
- [8] ADELFANG S I, SMITH O E, BATTS G W. Ascent wind model for launch vehicle design[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1994, 31(3): 502 – 508.
- [9] SMITH O E, ADELFANG S. A compendium of wind statistics and models for the NASA space shuttle and other aerospace

vehicle programs [R]. Alabama: NASA Marshall Space Flight Center, 1998.

- [10] ADELFANG S. User's guide for monthly vector wind profile model[R]. Alabama: NASA Marshall Space Flight Center, 1999.
- [11] JOHNSON D. Terrestrial environment (climatic) criteria guidelines for use in aerospace vehicle development [R]. Alabama: NASA Marshall Space Flight Center, 1993.
- [12] 程维虎,杨振海.舍选法几何解释及曲边梯形概率密度随机数生成算法[J].数理统计与管理,2006,25(4):494-504.
  CHENG W H, YANG Z H. The geometric sense of acceptance rejection method and generating random number with uniform distribution on the trapezoid with curve side[J]. Application of Statistics and Management, 2006, 25(4):494-504.(in Chinese)
- [13] MARSAGLIA G, TSANG W W. The ziggurat method for generating random variables [J]. Journal of Statistical Software, 2000, 5(8): 1-7.