

改进 Laplace 先验下的复数域多任务贝叶斯压缩感知方法*

张启雷¹, 孙斌²

(1. 国防科技大学 电子科学学院, 湖南 长沙 410073; 2. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094)

摘要:为了将现有的实数域贝叶斯压缩感知方法推广至复数域,利用改进 Laplace 先验假设,提出了一种复数域多任务贝叶斯压缩感知(complex multitask Bayesian compressive sensing using modified Laplace priors, CMBCS-MLP)方法,消除了测量噪声方差的影响,并推导了一种基于递归操作的快速算法。数值仿真表明:针对复数域稀疏信号重构问题,相比于现有方法,所提 CMBCS-MLP 方法具有更好的精确性和鲁棒性。

关键词:贝叶斯压缩感知;多任务学习;改进 Laplace 先验;复数域贝叶斯压缩感知

中图分类号:TN911.7 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):
文章编号:1001-2486(2023)05-150-07



听语音
与作者互动
聊科研

Complex multitask Bayesian compressive sensing algorithm using modified Laplace priors

ZHANG Qilei¹, SUN Bin²

(1. College of Electronic Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. Beijing Institute of Tracking and Telecommunication Technology, Beijing 100094, China)

Abstract: To extend the existing real-valued BCS (Bayesian compressive sensing) framework to the complex-valued one, a CMBCS-MLP (complex multitask Bayesian compressive sensing algorithm using modified Laplace priors) was developed to eliminate the impact of measurement noise variance, and a fast algorithm based on sequential operations was further derived. It is demonstrated by numerical examples that the developed CMBCS-MLP algorithm is more accurate and robust than the existing algorithms in the complex sparse signal reconstructions.

Keywords: Bayesian compressive sensing; multitask learning; modified Laplace priors; complex Bayesian compressive sensing

稀疏贝叶斯学习(sparse Bayesian learning, SBL)理论已经发展成为信号处理领域的一个重要分支^[1-4]。SBL理论与压缩感知相结合催生了一类重要的稀疏信号重构算法,即贝叶斯压缩感知(Bayesian compressive sensing, BCS)方法^[5-7]。BCS方法的应用领域相当广泛,包括阵列设计、波束形成和雷达成像等^[8-10]。

SBL又被称为相关向量机(relevance vector machine, RVM),具有良好的全局最优和局部最优特性^[3]。研究表明,SBL等价于一种加权的 ℓ_1 范数算法,因此是一类精确性和鲁棒性更好的稀疏重构算法^[11]。文献[5]将SBL理论应用到压缩感知领域,并提出了BCS技术。随后,BCS被进一步扩展到多任务压缩感知领域^[6]。文献[7]基于分层Laplace先验分布,提出了一种改进的BCS方法。基于上述研究,实数域的BCS理论框架已

经基本完善了。然而,现有的实数域BCS方法无法直接解决复数域稀疏信号重构问题。

为了利用BCS理论实现复数域稀疏信号重构,文献[12-13]给出了一种直观的解决思路,即将复数分解为实部和虚部,分别利用现有的实数域BCS方法进行求解,最后将两部分结果合成为复数。在此基础上,文献[14]假设复数的实部和虚部具有相同的稀疏特性,提出了一种复数域多任务BCS(complex multitask Bayesian compressive sensing, CMT-BCS)算法。然而,由于复数分解,测量矩阵和信号的维度都被扩大了,上述算法的存储量和计算量明显增加。此外,复数分解不可避免地破坏了原始复数信号的内部结构,因此稀疏重构结果难以令人满意。

与上述算法不同,本文直接在复数域推导并构建BCS理论框架。首先,基于改进的分层Laplace

* 收稿日期:2021-05-25

基金项目:国家自然科学基金资助项目(62271495,61771478)

作者简介:张启雷(1985—),男,甘肃景泰人,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:zhangqilei@nudt.edu.cn

先验和多任务学习模型,建立了复数域贝叶斯压缩感知模型;其次,通过边缘积分消除了测量噪声方差的影响,提出了一种复数域贝叶斯压缩感知方法;再次,利用矩阵分解理论,推导了一种基于递归操作的快速算法;最后,利用数值仿真实验验证了本文提出的改进 Laplace 先验下的复数域多任务贝叶斯压缩感知 (complex multitask Bayesian compressive sensing algorithm using modified Laplace priors, CMBCS-MLP)方法的有效性。

1 问题描述

1.1 多任务学习模型

本文考虑一种多任务学习场景,假设不同任务之间是统计相关的,且共享相同的先验参数。复数域多任务贝叶斯测量模型可以表示为

$$y_i = \Phi_i x_i + n_i \quad (1)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, L$ 表示任务索引, L 代表任务数目; $y_i \in \mathbb{C}^{N_i}$ 表示复数域压缩观测数据, $\Phi_i \in \mathbb{C}^{N_i \times M}$ 表示复数域测量矩阵, $x_i \in \mathbb{C}^M$ 表示复数域原始信号, $n_i \in \mathbb{C}^{N_i}$ 代表复数域测量噪声, $N_i \ll M$ 。

根据 BCS 理论框架,如果 x_i 满足某种合适的稀疏先验分布,则可以利用贝叶斯原理得到该信号的后验概率,进而从压缩后的观测数据 y_i 中恢复出稀疏原始信号 x_i ^[1-3]。

1.2 改进的分层 Laplace 先验

根据贝叶斯理论观点,所有的未知变量均可以看作满足一定概率分布的统计量^[1,15]。

首先,假设 n_i 满足零均值复高斯分布,且方差为 σ^2 。令 $\beta = \sigma^{-2}$,则复数域观测数据的条件概率分布函数可以表示为

$$p(y_i | x_i, \beta) = \mathcal{L}\mathcal{N}(y_i | \Phi_i x_i, \beta^{-1}) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{N_i} \cdot \exp[-\beta \|y_i - \Phi_i x_i\|_2^2] \quad (2)$$

其中, $\mathcal{L}\mathcal{N}(\cdot)$ 代表多变量复高斯分布,先验参数 β 满足 Gamma 先验分布

$$p(\beta | a, b) = \Gamma(\beta | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \beta^{a-1} e^{-b\beta} \quad (3)$$

其中, $a \geq 0$ 和 $b \geq 0$ 属于超先验, Gamma 函数

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt。$$

然后,假设原始信号 x_i 满足某种稀疏先验分布。文献[7]已经证明,相比于 RVM 中的先验分布^[1],分层 Laplace 分布是一种性能更优的先验分布。然而,直接沿用文献[7]提出的分层 Laplace 先验设置得到的 BCS 算法受测量噪声方差,即先验参数 β 的影响。如果 β 的初始值设置

不合理,BCS 算法存在性能恶化的危险。然而,通过改进原始信号 x_i 的先验分布形式,可以消除参数 β 的影响,进而得到一种改进的 BCS 算法^[6]。

第一层,假设 x_i 满足特殊的多变量零均值复高斯分布

$$p(x_i | \alpha, \beta) = \prod_{m=1}^M \mathcal{L}\mathcal{N}(x_{i,m} | 0, \alpha_m^{-1} \beta^{-1}) = \prod_{m=1}^M \frac{\alpha_m \beta}{\pi} \cdot \exp[-\alpha_m \beta \cdot |x_{i,m}|^2] \quad (4)$$

其中, α 为先验参数, $|x_{i,m}|$ 表示 x_i 的第 m 个元素的绝对值。第二层,假设 α 先验参数满足一种特殊的 Gamma 分布

$$p(\alpha | \lambda) = \prod_{m=1}^M \Gamma(\alpha_m^{-1} | 1, \lambda) = \prod_{m=1}^M \lambda \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha_m}\right) \quad (5)$$

其中, $\alpha_m > 0$,且 $\lambda > 0$ 。综上,原始信号 x_i 的先验分布可以表示为

$$p(x_i | \beta, \lambda) = \int p(x_i | \alpha, \beta) p(\alpha | \lambda) d\alpha = (\lambda \beta)^{M/2} \cdot \exp[-2 \sqrt{\lambda \beta} \sum_{m=1}^M |x_{i,m}|] \quad (6)$$

可以看出,经过分层先验设置,复数域原始信号 x_i 满足 Laplace 先验分布。第三层,假设超先验参数 λ 满足一种特殊分布 $p(\lambda) = 1/\lambda$ ^[7]。

综上,图 1 给出了基于改进的分层 Laplace 先验的复数域多任务学习贝叶斯模型图。可以看出,该贝叶斯模型分为三层:底层为复数域多任务信号模型,中间层为由多个任务共享的先验参数,顶层为超先验参数,用来控制中间层的先验参数。

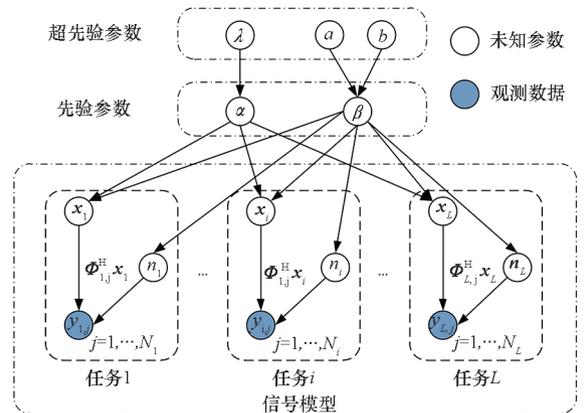


图 1 基于改进 Laplace 先验的复数域多任务贝叶斯压缩感知模型图

Fig.1 The graphical model of complex multitask Bayesian compressive sensing using modified Laplace priors

本文中先验参数和超先验参数同称为超参数 (hyper-parameters)。

2 CMBCS-MLP 方法

2.1 贝叶斯推断

根据 BCS 理论,原始信号的稀疏重构是通过使其后验概率最大得到的。图 1 中未知变量的后验概率分布可以表示为

$$p(\{\mathbf{x}_i\}, \alpha, \beta, \lambda | \{\mathbf{y}_i\}) = \frac{p(\{\mathbf{x}_i\}, \alpha, \beta, \lambda, \{\mathbf{y}_i\})}{p(\{\mathbf{y}_i\})} \quad (7)$$

其中, $\{\mathbf{x}_i\}$ 和 $\{\mathbf{y}_i\}$ 分别代表原始信号集和观测数据集。通常,很难直接得到 $p(\{\mathbf{x}_i\}, \alpha, \beta, \lambda | \{\mathbf{y}_i\})$ 的解析表达式^[1]。然而,根据贝叶斯原理

$$p(\{\mathbf{x}_i\}, \alpha, \beta, \lambda | \{\mathbf{y}_i\}) = p(\{\mathbf{x}_i\} | \{\mathbf{y}_i\}, \alpha, \beta, \lambda) \cdot p(\alpha, \beta, \lambda | \{\mathbf{y}_i\}) \quad (8)$$

根据式(8),可以得到一种实用的贝叶斯推断方法。

假设超参数 α 和 β 已知,则原始信号 \mathbf{x}_i 的后验概率分布可以表示为

$$p(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i, \alpha, \beta) = \frac{p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \beta) p(\mathbf{x}_i | \alpha, \beta)}{p(\mathbf{y}_i | \alpha, \beta)} \quad (9)$$

根据式(2)和式(4),可以得到

$$p(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i, \alpha, \beta) = \mathcal{L}\mathcal{N}(\mathbf{x}_i | \boldsymbol{\mu}_i, \beta^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_i) \quad (10)$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i \boldsymbol{\Phi}_i^H \mathbf{y}_i \\ \boldsymbol{\Sigma}_i = (\boldsymbol{\Phi}_i^H \boldsymbol{\Phi}_i + \mathbf{A})^{-1} \end{cases} \quad (11)$$

$\mathbf{A} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)$ 是对角矩阵。

进而,基于 1.2 节建立的特殊先验分布,可以通过边缘积分消去参数 β 的影响,即

$$p(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i, \alpha) = \int p(\mathbf{x}_i | \mathbf{y}_i, \alpha, \beta) p(\beta | a, b) d\beta = \frac{\Gamma(M+a) \left[1 + \frac{(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i)^H \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_i)}{b} \right]^{-(M+a)}}{\Gamma(a) (b\pi)^M |\boldsymbol{\Sigma}_i|} \quad (12)$$

可以看出,通过边缘积分消去超参数 β 之后, \mathbf{x}_i 的后验概率分布从式(10)给出的多变量复高斯分布变为式(12)给出的多变量 Student-t 分布^[6]。根据 Student-t 分布的性质, \mathbf{x}_i 的后验期望仍然为 $\boldsymbol{\mu}_i$ 。然而,相比于高斯分布, Student-t 分布具有更尖锐的峰值和更长的拖尾^[1,6],这意味着改进后的算法具有更好的稀疏重构性能。此外,消除了测量噪声方差的影响之后,式(12)中给出的稀疏重构算法鲁棒性更好。

2.2 超参数估计

本节基于经验贝叶斯 (empirical Bayesian) 方法^[1],给出超参数估计方法。为了估计超参数 α 和 λ ,需要利用所有的观测数据集 $\{\mathbf{y}_i\}$ 。根据贝叶斯原理, $p(\alpha, \lambda | \{\mathbf{y}_i\}) \propto p(\{\mathbf{y}_i\} | \alpha, \lambda)$, 且

$$p(\{\mathbf{y}_i\} | \alpha, \lambda) = p(\alpha | \lambda) p(\lambda) \prod_{i=1}^L p(\mathbf{y}_i | \alpha) \quad (13)$$

因此,通过使 $p(\{\mathbf{y}_i\} | \alpha, \lambda)$ 最大化可以得到上述超参数的点估计值。

根据式(2)和式(3),可以得到

$$p(\mathbf{y}_i | \alpha, \beta) = \int p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \beta) p(\mathbf{x}_i | \alpha, \beta) d\mathbf{x}_i = \mathcal{L}\mathcal{N}(\mathbf{y}_i | 0, \beta^{-1} \mathbf{B}_i) \quad (14)$$

其中, $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\Phi}_i^H$ 。进而,可以得到边缘似然 (marginal likelihood) 分布为

$$p(\mathbf{y}_i | \alpha) = \int p(\mathbf{y}_i | \alpha, \beta) p(\beta | a, b) d\beta = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \pi^{-N_i} |\mathbf{B}_i|^{-1} (\mathbf{y}_i^H \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{y}_i + b)^{-(N_i+a)} \Gamma(N_i + a) \quad (15)$$

为了方便推导,下面将 $p(\{\mathbf{y}_i\} | \alpha, \lambda)$ 的对数值作为代价函数

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha, \lambda) &= \ln p(\{\mathbf{y}_i\} | \alpha, \lambda) \\ &= - \sum_{i=1}^L [\ln |\mathbf{B}_i| + (N_i + a) \ln (\mathbf{y}_i^H \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{y}_i + b)] - \\ &\quad \lambda \sum_{m=1}^M \frac{1}{\alpha_m} + (M-1) \ln \lambda + C \end{aligned} \quad (16)$$

其中, C 为常数。对 $\mathcal{L}(\alpha, \lambda)$ 分别关于 α_m 和 λ 求导,并令导数为零,可以得到两者的点估计值为

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_m = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4\lambda\Delta_m}}{2\Delta_m} \\ \hat{\lambda} = \frac{M-1}{\sum_{m=1}^M \alpha_m^{-1}} \end{cases} \quad (17)$$

其中, $\Delta_m = \sum_{i=1}^L \left[\boldsymbol{\Sigma}_{i,mm} + \frac{(N_i + a) \boldsymbol{\mu}_i^2}{\mathbf{y}_i^H \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{y}_i + b} \right]$, $\boldsymbol{\mu}_{i,m}$ 是 $\boldsymbol{\mu}_i$ 的第 m 个元素, $\boldsymbol{\Sigma}_{i,mm}$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 的第 m 个对角线元素。从前面的推导可以看出, $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 是 α 的函数,而超参数 α 和 λ 又是 $\boldsymbol{\mu}_i$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_i$ 的函数。这意味着上述贝叶斯学习算法需要在式(11)和式(17)之间不断迭代,直到满足迭代终止条件。在迭代学习过程中,基于 RVM 原理^[1],绝大多数 α_m 的值将趋于无穷大,其对应的 $x_{i,m}$ 的值则趋于零;只有少数 α_m 具有有限值,其对应的 $x_{i,m}$ 具有合理值,正好对应原始信号 \mathbf{x}_i 的稀疏解。

然而,需要指出的是,上述迭代算法涉及矩阵求逆运算,运算量较大。尤其对于高维度的信号,该算法的运算量是难以承受的。因此,为了提高该算法的实用性,有必要研究其快速算法。

3 基于矩阵分解理论的快速算法

如前所述,在迭代算法中,最主要的计算量来自式(11)中 Σ_i 的求解,不仅涉及矩阵求逆运算,还需要在每次迭代中更新 α 中全部的元素。事实上,文献[2]已经证明,更新 α 中单个元素也可以实现代价函数 $\mathcal{L}(\alpha, \lambda)$ 的有效更新。因此,通过序贯地增加、删除或重新估计 α 中的某一个元素,可以实现超参数 α 的有效估计,最终找到原始信号 \mathbf{x}_i 中所有有效的 $x_{i,m}$,即实现稀疏重构。

3.1 算法推导

根据矩阵分解理论^[2],矩阵 \mathbf{B}_i 可以写为

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{i,-m} + \alpha_m^{-1} \Phi_{i,m} \Phi_{i,m}^H \quad (18)$$

其中, $\mathbf{B}_{i,-m} = \mathbf{I} + \sum_{k \neq m} \alpha_k^{-1} \Phi_{i,k} \Phi_{i,k}^H$, $\Phi_{i,m}$ 是 Φ_i 的第 m 个列向量。通过矩阵分解,超参数 α_m 与 α 的其他元素实现了有效隔离。进而,基于行列式等式和求逆等式,可以得到

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}_i| &= |\mathbf{B}_{i,-m}| \left| 1 + \alpha_m^{-1} \Phi_{i,m}^H \mathbf{B}_{i,-m}^{-1} \Phi_{i,m} \right| \\ \mathbf{B}_i^{-1} &= \mathbf{B}_{i,-m}^{-1} - \frac{\mathbf{B}_{i,-m}^{-1} \Phi_{i,m} \Phi_{i,m}^H \mathbf{B}_{i,-m}^{-1}}{\alpha_m + \Phi_{i,m}^H \mathbf{B}_{i,-m}^{-1} \Phi_{i,m}} \end{aligned} \quad (19)$$

只考虑 $\mathcal{L}(\alpha, \lambda)$ 中 α 的影响,则可以得到

$$\mathcal{L}(\alpha) = L(\alpha_{-m}) + \ell(\alpha_m) \quad (20)$$

其中, $L(\alpha_{-m})$ 与 α_m 无关,而 $\ell(\alpha_m)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \ell(\alpha_m) &= -\frac{\lambda}{\alpha_m} + \sum_{i=1}^L \ln \frac{\alpha_m}{\alpha_m + s_{i,m}} - \\ &\quad \sum_{i=1}^L (N_i + a) \ln \left[1 - \frac{|q_{i,m}|^2}{g_{i,m}(\alpha_m + s_{i,m})} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} s_{i,m} = \Phi_{i,m}^H \mathbf{B}_{i,-m}^{-1} \Phi_{i,m} \\ q_{i,m} = \Phi_{i,m}^H \mathbf{B}_{i,-m}^{-1} \mathbf{y}_i \\ g_{i,m} = \mathbf{y}_i^H \mathbf{B}_{i,-m}^{-1} \mathbf{y}_i + b \end{cases} \quad (22)$$

因此,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\alpha)}{\partial \alpha_m} &= \frac{\partial \ell(\alpha_m)}{\partial \alpha_m} = \frac{\lambda}{\alpha_m^2} + \\ &\quad \sum_{i=1}^L \left[\frac{s_{i,m} \left(s_{i,m} - \frac{|q_{i,m}|^2}{g_{i,m}} \right) - (N_i + a) |q_{i,m}|^2}{\alpha_m \left(\alpha_m + s_{i,m} - \frac{|q_{i,m}|^2}{g_{i,m}} \right) (\alpha_m + s_{i,m})} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

理论上,令式(23)等于零可以得到 α_m 的点

估计值。然而,除 $\alpha_m = \infty$ 这个解之外,很难得到 α_m 的其他解析解。文献[2]已经证明,通常 $\alpha_m \ll s_{i,m}$,因此可以得到

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\alpha)}{\partial \alpha_m} \approx \frac{\lambda}{\alpha_m^2} + \frac{L}{\alpha_m} - \Delta'_m = 0 \quad (24)$$

其中

$$\Delta'_m = \sum_{i=1}^L \left[\frac{(N_i + a) |q_{i,m}|^2 / g_{i,m} - s_{i,m}}{(s_{i,m} - |q_{i,m}|^2 / g_{i,m}) s_{i,m}} \right] \quad (25)$$

通过求解式(24),可以得到 α_m 的近似解为

$$\hat{\alpha}_m \approx \begin{cases} \frac{L + \sqrt{L^2 + 4\Delta'_m \lambda}}{2\Delta'_m} & \Delta'_m > 0 \\ \infty & \Delta'_m \leq 0 \end{cases} \quad (26)$$

基于式(26),可以得到一种基于递归操作的复数域多任务贝叶斯压缩感知快速算法。在每次的递归操作中,只需要更新一个候选的 α_m ,因此 μ_i 和 Σ_i 的更新很高效,同时 λ 也可以同步更新。实际中,通常选择使 $\ell(\alpha_m)$ 值最大的 α_m 作为候选参数,可以获得更快的收敛速度^[5-7]。

3.2 误差分析

在上述推导中,为了得到 α_m 的解析解,假设 $\alpha_m \ll s_{i,m}$,进而得到近似等式(24),因此必须分析该假设带来的近似误差。

在式(23)的基础上,进一步求解代价函数 $\mathcal{L}(\alpha)$ 的二阶导数可得

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\alpha)}{\partial \alpha_m^2} \approx -\frac{L}{\alpha_m^2} - \frac{2\lambda}{\alpha_m^3} \quad (27)$$

由式(27)可以看出,由于 $\alpha_m \geq 0$,因此 $\partial^2 \mathcal{L}(\alpha) / \partial \alpha_m^2$ 非正。特别地,在式(26)给出的近似解处, $\partial^2 \mathcal{L}(\alpha) / \partial \alpha_m^2 < 0$ 。这意味着,在式(26)给出的近似解处, $\ell(\alpha_m)$ 可以达到唯一的最大值。

然而,上述分析是建立在假设 $\alpha_m \ll s_{i,m}$ 的基础之上的。虽然文献[2]和文献[6]已经证明了该假设的有效性,但只能保证式(26)给出的近似解位于 $\ell(\alpha_m)$ 的局部最大值点附近,因此上述近似处理是次优的。尽管如此,已有文献[2,5-7]和本文的数值仿真均表明上述快速算法的精确性和有效性是足够的。

3.3 计算复杂度分析

本节基于矩阵分解理论推导了一种基于递归操作的快速算法,相比于第2节的迭代算法,可以有效降低计算复杂度。

针对第2节给出的迭代算法,最主要的计算量来自式(11)中的矩阵求逆。矩阵 Σ_i 的维度为 $M \times M$,因此求逆运算的计算复杂度为 $O(M^3)$ ^[5]。随着 M 的增大,该计算复杂度急剧增加。本节提

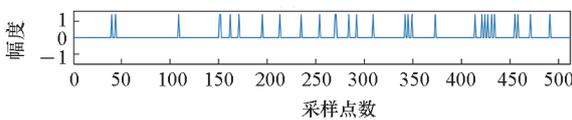
出的快速算法采取递归操作,每次只针对 α 中的一个元素进行计算,直到找到 α 中所有的有效元素,操作次数近似等于压缩观测数据的维度 N_i 。详细分析表明^[2]:基于递归操作的快速算法的计算复杂度为 $O(N_i M^2)$ 。由于 $N_i \ll M$,因此相比于第 2 节的迭代算法,本节给出的快速算法计算复杂度大大降低。

4 数值仿真

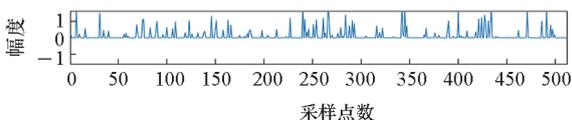
通过数值仿真来验证 CMBCS-MLP 方法的有效性。考虑到实际应用,仿真中所用的 CMBCS-MLP 方法均指第 3 节给出的快速算法。不失一般性,本文定义重构误差为: $e = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2$,其中 $\|\cdot\|_2$ 代表 ℓ_2 范数运算。

单任务学习可以视作多任务学习的特例,CMBCS-MLP 方法同样适用于单任务学习场景,此时令 $L = 1$ 即可。首先,面向单任务学习场景,针对两种不同的复数域信号进行稀疏重构实验,并与文献[12-13]给出的实数域 BCS 方法(记为 RBCS)和文献[14]提出的 CMT-BCS 方法的重构结果进行对比。为了便于对比,在仿真中, $a = 100/E\{VAR(\mathbf{y}_i)\}$, $b = 1$,其中 $VAR(\cdot)$ 代表求方差, $E\{\cdot\}$ 代表求均值。

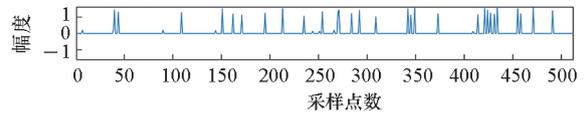
第一种信号为复数域均匀尖峰信号,长度 $M = 512$,其实部和虚部分别包含 30 个位置随机出现的尖峰,尖峰幅度为 1 或 -1。测量矩阵 Φ_i 的生成分为两步:首先,生成服从复高斯分布 $\mathcal{CN}(0, 1)$,维度为 $N_i \times M$ 的复矩阵, $N_i = 100$;然后,对该复矩阵沿行进行幅度归一化处理。测量噪声 \mathbf{n}_i 的实部和虚部均满足零均值高斯分布,且标准差为 $\sigma = 0.005$ 。稀疏重构实验的结果如图 2 所示,由于篇幅所限,图中只给出了复数域信号的幅度。其中 RBCS、CMT-BCS、CMBCS-MLP 方法的重构误差分别为 $e_{RBCS} = 1.226 7$ 、 $e_{CMT-BCS} = 0.255 3$ 、 $e_{CMBCS-MLP} = 0.016 9$ 。



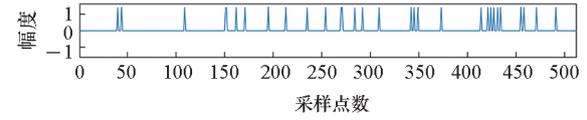
(a) 原始信号
(a) Original signal



(b) RBCS 方法重构结果
(b) Reconstruction result using RBCS



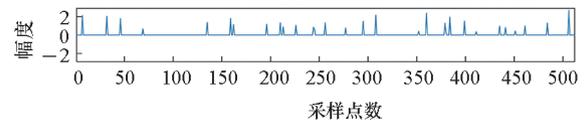
(c) CMT-BCS 方法重构结果
(c) Reconstruction result using CMT-BCS



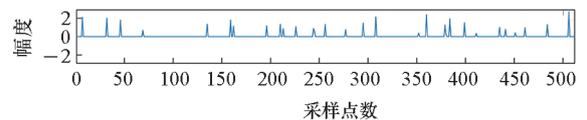
(d) CMBCS-MLP 方法重构结果
(d) Reconstruction result using CMBCS-MLP

图 2 复数域均匀尖峰信号重构结果 ($N_i = 100, M = 512$)
Fig. 2 Reconstruction result of complex uniform spikes ($N_i = 100, M = 512$)

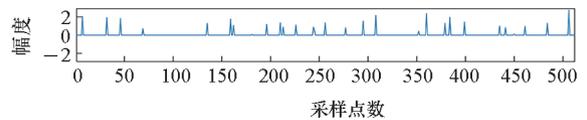
第二种信号为复数域非均匀尖峰信号,长度 $M = 512$,其实部和虚部分别包含 30 个位置随机出现的尖峰,尖峰的幅度满足零均值高斯分布,且与均匀尖峰信号的功率相等。测量矩阵 Φ_i 和测量噪声 \mathbf{n}_i 的生成方法与前文相同。稀疏重构实验的结果如图 3 所示。其中 RBCS、CMT-BCS、CMBCS-MLP 方法的重构误差分别为 $e_{RBCS} = 0.023 5$ 、 $e_{CMT-BCS} = 0.099 5$ 、 $e_{CMBCS-MLP} = 0.015 5$ 。



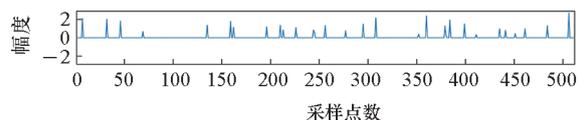
(a) 原始信号
(a) Original signal



(b) RBCS 方法重构结果
(b) Reconstruction result using RBCS



(c) CMT-BCS 方法重构结果
(c) Reconstruction result using CMT-BCS



(d) CMBCS-MLP 方法重构结果
(d) Reconstruction result using CMBCS-MLP

图 3 复数域非均匀尖峰信号重构结果 ($N_i = 100, M = 512$)
Fig. 3 Reconstruction result of complex non-uniform spikes ($N_i = 100, M = 512$)

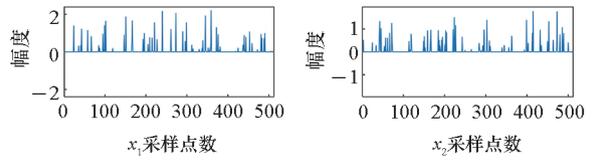
由图 2 和图 3 可以看出,针对两种不同的复数域稀疏信号,CMBCS-MLP 方法均给出了最优的重构结果。然而,图 2 和图 3 给出的结果仅是随机过程的一次实现,不具有普遍意义。此外,除重构精度外,计算耗时也是重构算法的重要指标。分别针对上述两种复数域稀疏信号,利用蒙特卡罗方法开展重构实验,实验重复次数为 100 次。不同 BCS 算法的重构性能如表 1 所示。可以看出:CMBCS-MLP 在重构精度和计算耗时两个方面均是最优算法,而 RBCS 算法的性能最差。虽然 CMT-BCS 针对复数域均匀尖峰信号给出了较好的重构结果,但计算耗时是最长的;而对复数域非均匀尖峰信号,CMT-BCS 的重构误差和计算耗时两项指标均是最差的。究其原因,是 RBCS 和 CMT-BCS 算法人为破坏了复数信号的内部结构,造成算法鲁棒性较差、耗时较长;而本文提出的 CMBCS-MLP 算法直接在复数域进行重构,克服了上述缺陷,因此算法鲁棒性较好,计算耗时较短。

表 1 不同 BCS 算法的重构性能

Tab. 1 Reconstruction performance of different BCS algorithms

算法	均匀尖峰信号		非均匀尖峰信号	
	重构误差	计算耗时/s	重构误差	计算耗时/s
RBCS	1.203 5	20.5	0.050 3	6.5
CMT-BCS	0.051 4	48.7	0.152 2	65.4
CMBCS-MLP	0.016 7	9.2	0.019 7	5.1

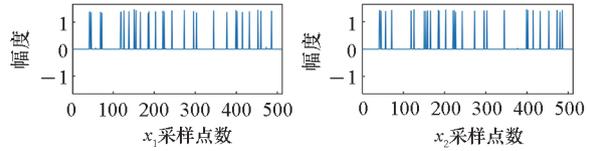
最后,通过多任务学习模型来验证 CMBCS-MLP 方法在多任务学习中的优势。假设两个复数域均匀尖峰信号的参数与前文相同,长度均为 $M=512$ 。一个特殊的设置在于这两个复数域信号有 80% 的尖峰位于相同的位置,即二者的相似性为 80%。两个信号的测量次数分别为 $N_1=70$ 和 $N_2=75$ 。测量矩阵 Φ_i 和测量噪声 n_i 的生成方法与前文相同。稀疏重构实验的结果如图 4 所示。可以看出:由于观测数据较少,观测噪声较大,采用单任务学习 CMBCS-MLP 方法重构结果误差较大,无法恢复原始信号;而多任务学习



(b) 单任务算法重构结果 x_1 和 x_2

(b) Reconstruction results of x_1 and x_2

using single-task algorithm



(c) 多任务算法重构结果 x_1 和 x_2

(c) Reconstruction results of x_1 and x_2

using multitask algorithm

图 4 多任务学习场景下的 CMBCS-MLP 方法重构结果 ($N_i=100, M=512$)

Fig. 4 Reconstruction result of CMBCS-MLP for the multitask learning setting ($N_i=100, M=512$)

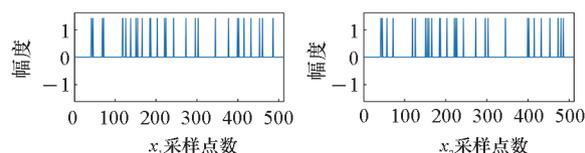
CMBCS-MLP 方法充分利用了两个复数域信号之间的相似性,准确恢复了两个原始信号。

5 结论

现有的 BCS 理论框架是在实数域推导和建立的,因此无法直接用于复数域稀疏信号重构。针对这个问题,本文直接在复数域推导 BCS 方法。基于改进的分层 Laplace 先验和多任务学习模型,本文在复数域推导了一种 CMBCS-MLP 方法,并基于矩阵分解理论给出了其快速算法。理论分析和数值仿真表明:针对复数域稀疏信号重构问题,相比于现有的实数域 BCS 方法,CMBCS-MLP 方法具有更好的精确性和鲁棒性。下一步研究的重点在于将 CMBCS-MLP 方法应用到具体的复数域信号处理问题中,进一步拓展 BCS 技术的应用范畴。

参考文献 (References)

- [1] TIPPING M E. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2001, 1: 211 - 244.
- [2] TIPPING M E, FAUL A C. Fast marginal likelihood maximization for sparse Bayesian models[C]//Proceedings of the Ninth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics, 2003.
- [3] DONG J Y, LYU W T, ZHOU D, et al. Variational Bayesian and generalized approximate message passing-based sparse Bayesian learning model for image reconstruction [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022, 29: 2328 - 2332.
- [4] SHEKARAMIZ M, MOON T K. Compressive sensing via



(a) 原始信号 x_1 和 x_2

(a) Original signal x_1 and x_2

- variational Bayesian inference [C]//Proceedings of Intermountain Engineering, Technology and Computing (IETC), 2020.
- [5] JI S H, XUE Y, CARIN L. Bayesian compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346–2356.
- [6] JI S H, DUNSON D, CARIN L. Multitask compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 92–106.
- [7] BABACAN S D, MOLINA R, KATSAGGELOS A K. Bayesian compressive sensing using Laplace priors[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(1): 53–63.
- [8] LIN Z W, CHEN Y W, LIU X S, et al. A Bayesian compressive sensing-based planar array diagnosis approach from near-field measurements [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2021, 20(2): 249–253.
- [9] LI C, ZHOU T, GUO Q J, et al. Compressive beamforming based on multiconstraint Bayesian framework [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2021, 59(11): 9209–9223.
- [10] ZHANG R, BAI X, ZHAO J. Multiband passive ISAR processing based on Bayesian compressive sensing [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Signal, Information and Data Processing (ICSIDP), 2019.
- [11] WIPF D, PALMER J, RAO B. Perspectives on sparse Bayesian learning[C]//Proceedings of the 16th International Conference on Neural Information Processing Systems, 2003.
- [12] OLIVERI G, CARLIN M, MASSA A. Complex-weight sparse linear array synthesis by Bayesian compressive sampling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(5): 2309–2326.
- [13] CARLIN M, ROCCA P, OLIVERI G, et al. Directions-of-arrival estimation through Bayesian compressive sensing strategies [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(7): 3828–3838.
- [14] WU Q S, ZHANG Y D, AMIN M G, et al. Complex multitask Bayesian compressive sensing[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014: 3375–3379.
- [15] ZHANG Q L, DONG Z, ZHANG Y S. Complex multitask compressive sensing using Laplace priors [J]. Electronics Letters, 2021, 57(25): 998–1000.