doi:10.11887/j.cn.202306016 http://journal.nudt.edu.cn

多基准站相对定位算法及先验基线向量偏差影响分析*

伍劭实[1],范 波[1],钟季龙[1],侯振伟[1],张 良[2]
(1. 军事科学院 国防科技创新研究院,北京 100071;2. 空军工程大学 信息与导航学院,陕西 西安 710077)

摘 要:为提高单基准站短基线相对定位解算的可靠性,研究了多基准站约束的相对定位算法。将基准站间可提前测量的先验基线信息融入观测模型中,给出了多基准站相对定位的函数模型和随机模型,在此基础上推导了模糊度精度因子的解析表达式,揭示了基准站数量的增加对模糊度浮点解精度提升的作用;从理论上分析了基准站间先验基线信息中的偏差对模糊度解算的影响,分析表明,当先验基线各分量偏差的绝对值之和小于5 cm时,模糊度解算几乎不受影响;通过仿真和实测数据进行了验证。试验结果表明,增加基准站数量不仅能有效提升模糊度解算成功率和收敛速度,并且对先验基线信息中的偏差具有较好的抑制作用,当基线各分量偏差均增加到4 cm时,实测数据模糊度解算成功率仍能达到92%以上。研究结论为特殊场景下多基准站间的快速非精确标定提供了理论依据。

关键词:全球导航卫星系统;相对定位;多基准站;整周模糊度解算;成功率
中图分类号:P228.4 **文献标志码:**A **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**
文章编号:1001-2486(2023)06-143-07

听语音 聊科研 与作者互动

Multi-reference-station based relative positioning method and impact analysis of the biases in priori baseline vectors

WU Shaoshi[1], *FAN Bo*[1], *ZHONG Jilong*[1], *HOU Zhenwei*[1], *ZHANG Liang*[2]
(1. National Innovation Institute of Defense Technology, Academy of Military Science, Beijing 100071, China;
2. Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

Abstract: In order to improve the reliability of the single-reference-station based relative positioning solutions over short baselines, the multi-reference-station based relative positioning method was explored. A priori baseline information between the reference stations was integrated into the observable model, thus giving the functional and stochastic models of the multi-reference-station based relative positioning. Based on that, the closed-form formula of the ambiguity dilution of precision for the positioning was derived so that the influence of the number of reference stations on the float ambiguity precision was revealed. Then the impacts of the biases in the a priori baseline information on the integer ambiguity resolution were analyzed theoretically. It show that the integer ambiguity resolution could barely be influenced on the condition that the bias is less than 5 cm. The multi-reference-station based relative positioning method was validated with both the simulated and real data sets. The numerical results show that, increasing the number of reference stations not only improves the single-frequency ambiguity resolution success rate and convergence rate, but also restrains the biases in the a priori baseline information. For example, the ambiguity resolution success rate is still larger than 92% even when the biases of the baseline components attain 4 cm in the field tests. This contribution provides the theoretical foundation for the fast and imprecise calibration between the multiple-reference-station in special scenarios.

Keywords: GNSS; relative positioning; multi-reference-station; integer ambiguity resolution; success rate

基于全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)载波相位测量的相对定位技术能够提供厘米级甚至毫米级的定位精度[1-2],在飞机全自动着陆、着舰,飞机精密编队飞行,实时动态测量等应用中发挥着重要作用。快速、可靠的整周模糊度解算是高精度相对定位的关键[3-5]。在短基线条件下,当可视卫星数较多时,基于单基准站的相对定位能够获得较高的模糊度解算成功率;当可视卫星数较少、观测环境较差时,模糊度解算成功率可能出现明显下降,使得相对定位结果不可靠[6-7]。

为了提高定位解算的可靠性,可将单天线替换为多天线,利用几何构型已知的天线阵列辅助参数,这一思想称为天线阵列辅助,其首次在文

* 收稿日期:2021-10-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(41904014)
作者简介:伍劭实(1990—),男,湖北宜昌人,助理研究员,博士,E-mail:shaoshi_wu@163.com;
范波(通信作者),男,山东泰安人,副研究员,博士,硕士生导师,E-mail:Oceanpearl@126.com

献[8]中提出，用以提升精密单点定位的效果，随后被扩展到多种应用中；文献[9]利用安装在运载体上的天线阵约束，显著提高了姿态测量中模糊度解算的成功率；文献[10]研究了天线阵对连续运行参考站之间模糊度求解的影响，仿真结果表明，该方法能显著提高整体和部分模糊度的解算成功率；文献[11]将天线阵列辅助的思想进一步扩展到卫星相位偏差估计，提升了参数估计的效果。

为提高单频单历元短基线相对定位解算的可靠性，本文借鉴天线阵列辅助的思想，利用基准站之间可提前精确测量的基线信息，提升相对定位中模糊度的估计效果，在此基础上推导模糊度精度因子(ambiguity dilution of precision, ADOP)的解析表达式，揭示基准站数量与模糊度浮点解精度的关系，然后进一步分析先验基线信息中可能包含的偏差对模糊度解算的影响，最后通过仿真和实测数据进行试验验证。

1　多基准站相对定位模型

假设移动站 m 和 n 个基准站 $\mathrm{r}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 f 个频点上同时观测 $s+1$ 颗卫星，那么短基线情况下的多基准站单历元相对定位函数模型可表示为

$$\begin{cases}E(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_0-\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_0)=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{z}_1)+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{b}_1)\\E(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_0)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{b}_1)\end{cases}\tag{1}$$

其中：$E(\cdot)$ 表示期望算子；$\boldsymbol{\Phi}=[\boldsymbol{\phi}_1\quad\boldsymbol{\phi}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\phi}_n]$ 为 $sf\times n$ 维双差载波相位观测矩阵，$\boldsymbol{\phi}_i$ 为基线 $\boldsymbol{b}_i$(移动站 m 和基准站 r_i 组成的基线)上的 sf 维双差载波相位观测向量；$\boldsymbol{P}$ 为 $sf\times n$ 维双差伪距观测矩阵；$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\lambda}\otimes\boldsymbol{I}_s$ 为 $sf\times sf$ 维模糊度系数矩阵，$\boldsymbol{\lambda}$ 为 $f\times f$ 维对角阵，其对角线元素为各频点的波长，$\boldsymbol{I}_s$ 表示 s 维单位阵，$\otimes$ 表示 Kronecker 乘积；$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_f\otimes\boldsymbol{g}$ 为 $sf\times 3$ 维基线系数矩阵，其中 $\boldsymbol{g}$ 为 $s\times 3$ 维差分视线向量矩阵，$\boldsymbol{e}_f$ 表示各元素均为 1 的 f 维向量，同理 $\boldsymbol{e}_n$ 表示各元素均为 1 的 n 维向量；$\boldsymbol{b}_1$ 为待求的 3 维基线向量，$\boldsymbol{z}_1$ 为 $\boldsymbol{b}_1$ 上待求的 sf 维双差模糊度向量；$\boldsymbol{B}_0=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{b}_{21}\quad\boldsymbol{b}_{31}\quad\cdots\quad\boldsymbol{b}_{n1}]$ 为 $3\times n$ 维参考基线矩阵，$\boldsymbol{b}_{i1}$ 表示基准站 r_i 与基准站 r_1 组成的基线向量；$\boldsymbol{Z}_0=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{z}_{21}\quad\boldsymbol{z}_{31}\quad\cdots\quad\boldsymbol{z}_{n1}]$ 为 $sf\times n$ 维双差模糊度矩阵，$\boldsymbol{z}_{i1}$ 表示基线 $\boldsymbol{b}_{i1}$ 上的双差模糊度向量，由于参考基线 $\boldsymbol{b}_{i1}$ 可提前精确标定，那么 $\boldsymbol{z}_{i1}$ 可通过式(2)快速求得。

$$\boldsymbol{z}_{i1}=\mathrm{round}[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_{i1}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}_{i1})]\tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{\phi}_{i1}$ 表示基线 $\boldsymbol{b}_{i1}$ 上的双差模糊度观测量，“round”表示四舍五入。由于 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{z}_1)=\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{z}_1$，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{b}_1)=\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{b}_1$(“vec”表示向量化算子)，运用向量化运算公式 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{ABC})=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{vec}(\boldsymbol{B})$ 和 Kronecker 乘积性质 $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{AB})\otimes(\boldsymbol{CD})$，式(1)变为

$$\begin{cases}\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_0-\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_0)=(\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{z}_1+(\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{b}_1\\\mathrm{vec}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_0)=(\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{b}_1\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{Y}_{\Phi}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_0-\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_0)$，$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}}=\mathrm{vec}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}_0)$，$\bar{\boldsymbol{\Lambda}}=\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda}$，$\bar{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{G}$，式(1)进一步变为

$$\begin{cases}E(\boldsymbol{Y}_{\Phi})=\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{z}_1+\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{b}_1\\E(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}})=\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{b}_1\end{cases}\tag{3}$$

建立合理的随机模型是 GNSS 精密测量与定位的先决条件[12]。假设各接收机测量误差服从相同的高斯分布，则多基准站相对定位随机模型可表示为

$$\begin{cases}D(\boldsymbol{Y}_{\Phi})=\boldsymbol{Q}_{\Phi}=(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{\phi}^2\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})\\D(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}})=\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}=(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{p}^2\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})\end{cases}\tag{4}$$

其中，$D(\cdot)$ 表示方差算子，$\boldsymbol{\sigma}_{\phi}^2=\mathrm{diag}(\sigma_{\phi_1}^2,\cdots,\sigma_{\phi_f}^2)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{p}^2=\mathrm{diag}(\sigma_{p_1}^2,\cdots,\sigma_{p_f}^2)$ 为天顶方向的非差相位和伪距方差阵，$\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(w_1,\cdots,w_{s+1})$ 为加权阵，“diag”表示对角阵，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}=[\boldsymbol{e}_n\quad-\boldsymbol{I}_n]$ 为 $n\times(n+1)$ 维站间差分矩阵，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}=[-\boldsymbol{e}_s\quad\boldsymbol{I}_s]$ 为 $s\times(s+1)$ 维星间差分矩阵。

式(4)证明：设非差相位和伪距观测矩阵分别为 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ud}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{ud}}$，以相位观测量为例，双差观测量可表示为 $\boldsymbol{\Phi}=(\boldsymbol{I}_f\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}})\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ud}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}$，则

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi})=[\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\otimes(\boldsymbol{I}_f\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}})]\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ud}})$$

由于各接收机测量误差服从相同的高斯分布，则有 $D[\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ud}})]=\boldsymbol{I}_{n+1}\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{\phi}^2\otimes\boldsymbol{W}^{-1})$，根据误差传播定律得：

$$\begin{aligned}D[\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi})]&=[\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\otimes(\boldsymbol{I}_f\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}})]D[\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{ud}})]\cdot\\&\quad[\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\otimes(\boldsymbol{I}_f\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}})]^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{\phi}^2\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

同理 $D[\mathrm{vec}(\boldsymbol{P})]=(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})\otimes(\boldsymbol{\sigma}_{p}^2\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})$。

由于 $\boldsymbol{Z}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 可先验准确求得，可以认为：

$$D(\boldsymbol{Y}_{\Phi})=D[\mathrm{vec}(\boldsymbol{\Phi})]$$

$$D(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}})=D[\mathrm{vec}(\boldsymbol{P})]$$

□

由函数模型式(3)和随机模型式(4)可得待求基线 $\boldsymbol{b}_1$ 和模糊度 $\boldsymbol{z}_1$ 的最小二乘浮点解[13]为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{b}}_1 = \boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}}\\ \boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1} = (\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{z}}_1 = \boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_\Phi + \overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{Y}_\Phi - \overline{\boldsymbol{H}}\hat{\boldsymbol{b}}_1)\\ \boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1} = [\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_\Phi + \overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}]^{-1}\end{cases} \tag{5}$$

得到模糊度的浮点解及协方差阵后,可采用最小二乘模糊度降相关平差[4](least-squares ambiguity decorrelation adjustment, LAMBDA)算法进行模糊度的搜索,一旦模糊度固定至真值,即可精确解算出基线向量。

2　ADOP 分析

ADOP 的概念最先在文献[15]中提出,其定义为

$$ADOP = \sqrt{|\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}|^{\frac{1}{m}}} \tag{6}$$

式中,$|\cdot|$表示行列式运算,m 为模糊度浮点解协方差矩阵 $\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}$ 的维数。由式(6)可知,$ADOP$ 的计算基于模糊度浮点解协方差矩阵的行列式,它不仅取决于各个模糊度的方差,还包含了模糊度之间的相关性,反映了模糊度的平均精度。$ADOP$ 值越小,表明模糊度浮点解的平均精度越高。给出单历元多基准站相对定位的 $ADOP$ 解析表达式如下

$$ADOP_{多基准站} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^{f}\frac{\sigma_{\phi_i}}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{f}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{s+1}w_i}{\prod_{i=1}^{s+1}w_i}\right)^{\frac{1}{2s}}\cdot\left(1+\frac{\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{e}_f}{\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_p^{-2}\boldsymbol{e}_f}\right)^{\frac{3}{2sf}} \tag{7}$$

证明:根据式(5)、矩阵求逆公式$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{C})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$,以及行列式性质$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}|$,可得

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}| &= |\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_\Phi+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}|^{-1}\\ &= |\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}-\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}^{-1}+\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}]\overline{\boldsymbol{\Lambda}}|^{-1}\\ &= |\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}|^{-1}|\boldsymbol{I}_3-(\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}+\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})^{-1}\cdot\\ &\quad\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}(\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}})^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}|^{-1}\end{aligned} \tag{8}$$

将式(4)、$\overline{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{e}_n\otimes(\boldsymbol{\lambda}\otimes\boldsymbol{I}_s)$ 和 $\overline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{e}_n\otimes(\boldsymbol{e}_f\otimes\boldsymbol{g})$ 代入式(8),并利用 Kronecker 乘积性质$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\otimes\boldsymbol{B}^{-1}$,$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{AB})\otimes(\boldsymbol{CD})$,可得如下过渡项

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}} = e\cdot\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\phi\boldsymbol{\Lambda} = e[\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{\lambda}\otimes(\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})^{-1}]\\ \overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{H}} = e\cdot\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\phi\boldsymbol{G} = e[\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{e}_f\otimes\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{g}]\\ \overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}} = e\cdot\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{G} = e[\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_p^{-2}\boldsymbol{e}_f\otimes\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{g}]\\ \overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_\Phi^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}} = e\cdot\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_\phi\boldsymbol{\Lambda} = e[\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{\lambda}\otimes\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})^{-1}]\end{cases} \tag{9}$$

其中,$e = \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{e}_n = \dfrac{n}{n+1}$,$\boldsymbol{S}_\phi = [\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\otimes(\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})^{-1}]$,$\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}} = [\boldsymbol{\sigma}_p^{-2}\otimes(\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})^{-1}]$。结合行列式性质 $|\boldsymbol{A}_{n\times n}\otimes\boldsymbol{B}_{m\times m}| = |\boldsymbol{A}|^m|\boldsymbol{B}|^n$,式(8)变为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}| &= |\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{e}_n|^{-sf}|\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{\lambda}|^{-s}|\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}}|^f\cdot\\ &\quad|\boldsymbol{I}_3-[\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}+\boldsymbol{\sigma}_p^{-2})\boldsymbol{e}_f]^{-1}\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{e}_f\otimes\boldsymbol{I}_3|^{-1}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{sf}\left(\prod_{i=1}^{f}\frac{\sigma_{\phi_i}}{\lambda_i}\right)^{2s}\left(\frac{\sum_{i=1}^{s+1}w_i}{\prod_{i=1}^{s+1}w_i}\right)^{f}\left(1+\frac{\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{e}_f}{\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_p^{-2}\boldsymbol{e}_f}\right)^{3}\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}ADOP_{多基准站} &= |\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}|^{\frac{1}{2sf}}\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^{f}\frac{\sigma_{\phi_i}}{\lambda_i}\right)^{\frac{1}{f}}\left(\frac{\sum_{i=1}^{s+1}w_i}{\prod_{i=1}^{s+1}w_i}\right)^{\frac{1}{2s}}\left(1+\frac{\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_\phi^{-2}\boldsymbol{e}_f}{\boldsymbol{e}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_p^{-2}\boldsymbol{e}_f}\right)^{\frac{3}{2sf}}\end{aligned}$$

□

式(7)表明,$ADOP$ 值不仅与卫星数 s、频率数 f、加权矩阵 $\boldsymbol{W}$、测量精度 $\boldsymbol{\sigma}_\phi$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_p$ 相关,还受到基准站数量 n 的影响。因此,可视卫星数越多、所用频点数越多、测量精度越高、基准站数量越多,$ADOP$ 值将越小,表明模糊度浮点解的平均精度得到提升,这将有利于提高模糊度解算的成功率,从而增强高精度定位的可靠性。

3　基准站间先验基线信息偏差影响分析

前文分析已经表明,增加基准站数量能够提高模糊度浮点解的精度,其前提是基准站之间的基线向量通过先验测量得到精确标定。假若这一先验信息中包含偏差,则可能对模糊度的解算产生影响。本节将对这一问题进行分析。

假设包含偏差的参考基线项表示为 $\boldsymbol{B}_{0,\mathrm{b}} = \boldsymbol{B}_0+\Delta\boldsymbol{B}_0$,其中 $\Delta\boldsymbol{B}_0 = [\boldsymbol{0}\quad\Delta\boldsymbol{b}_{21}\quad\cdots\quad\Delta\boldsymbol{b}_{n1}]$,$\Delta\boldsymbol{b}_{i1}$ 表示 $\boldsymbol{b}_{i1}$ 中包含的偏差,则根据式(2),基准站之间的双差模糊度变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{0,\mathrm{b}} &= \mathrm{round}\{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}[\boldsymbol{\Phi}_0-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}_0+\Delta\boldsymbol{B}_0)]\}\\ &= [\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{z}_{21,\mathrm{b}}\quad\cdots\quad\boldsymbol{z}_{n1,\mathrm{b}}]\end{aligned}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}_0 = [\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{\phi}_{21}\quad\boldsymbol{\phi}_{31}\quad\cdots\quad\boldsymbol{\phi}_{n1}]$,$\boldsymbol{\phi}_{i1}$ 为 $\boldsymbol{b}_{i1}$ 上的双差相位观测量,$\boldsymbol{z}_{i1,\mathrm{b}}$ 表示 $\boldsymbol{b}_{i1}$ 上由基线向量偏差带来的模糊度整数值偏差。令 $\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0} = \mathrm{vec}(\Delta\boldsymbol{B}_0)$,$\boldsymbol{Y}_{Z_0} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_0)$,$\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_{0,\mathrm{b}})$,对于式(5),基线浮点解 $\hat{\boldsymbol{b}}_1$ 及其双差模糊度浮点解 $\hat{\boldsymbol{z}}_1$ 受偏差的影响可表示为 $\hat{\boldsymbol{b}}_{1,\mathrm{b}} = \hat{\boldsymbol{b}}_1+\Delta\hat{\boldsymbol{b}}$ 及 $\hat{\boldsymbol{z}}_{1,\mathrm{b}} = \hat{\boldsymbol{z}}_1+\Delta\hat{\boldsymbol{z}}$,其中

$$\begin{cases}\Delta\hat{\boldsymbol{b}} = -\dfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\Delta\boldsymbol{b}_{i1}\\ \Delta\hat{\boldsymbol{z}} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(\boldsymbol{z}_{i1}-\boldsymbol{z}_{i1,\mathrm{b}})\end{cases}\tag{10}$$

证明:包含参考基线偏差的伪距和相位观测量为

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P,b}} = \mathrm{vec}[\boldsymbol{P}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}_0+\Delta\boldsymbol{B}_0)] = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}}-(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta\boldsymbol{B}_0}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{\Phi,\mathrm{b}} &= \mathrm{vec}[\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_{0,\mathrm{b}}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{B}_0+\Delta\boldsymbol{B}_0)]\\ &= \boldsymbol{Y}_{\Phi}+(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{Y}_{Z_0}-\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}})-(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta\boldsymbol{B}_0}\end{aligned}$$

那么式(5)中的基线浮点解变为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{b}}_{1,\mathrm{b}} = \boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{P}}-(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}]\\ \quad = \hat{\boldsymbol{b}}_1-\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ \hat{\boldsymbol{z}}_{1,\mathrm{b}} = \boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{\Phi}+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\\ \quad [\boldsymbol{Y}_{\Phi}+(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{Y}_{Z_0}-\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}})-(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}-\overline{\boldsymbol{H}}\hat{\boldsymbol{b}}_{1,\mathrm{b}}]\\ \quad = \hat{\boldsymbol{z}}_1+\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{\Phi}+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\\ \quad [(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{Y}_{Z_0}-\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}})+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}-\\ \quad (\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}]\end{cases}\tag{11}$$

对于式(11)中的第一个等式有

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\boldsymbol{b}} &= -\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= -\{(\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}\otimes(\boldsymbol{\sigma}_p^2\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})]^{-1}(\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{G})\}^{-1}\cdot\\ &\quad (\boldsymbol{e}_n\otimes\boldsymbol{G})^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}\otimes(\boldsymbol{\sigma}_p^2\otimes\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{T}})]^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= -\{[\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{e}_n]^{-1}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\otimes\boldsymbol{I}_3\}\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= -\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_3\right)\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= -\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\Delta\boldsymbol{b}_{i1}\end{aligned}\tag{12}$$

对于式(11)中第二个等式有

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{\Phi}+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}[(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{Y}_{Z_0}-\\ &\quad \boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}})+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}-(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}]\end{aligned}\tag{13}$$

结合式(9)及 $\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{D}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}})^{-1}\otimes\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\phi} = \dfrac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n+1}\otimes\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\phi}$, $\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n+1}\otimes\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\phi}$, $\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n+1}\otimes\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}}$,式(13)中:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{\Phi}+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\\ &[\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}-(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}]\\ &= [\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}-\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{\Phi}+\\ &\quad \overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}]\times(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= \{\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}-[\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}-\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}\cdot\\ &\quad (\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}+\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}]^{-1}\cdot\\ &\quad [\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}-\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}(\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{P}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}+\\ &\quad \overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{\Phi}^{-1}]\}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= \left\{\frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n}\otimes[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{G})^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}}]-\frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n}\otimes\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right\}\cdot\\ &\quad (\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{G})\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= \left[\frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n}\otimes\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}-\frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n}\otimes\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\right]\boldsymbol{Y}_{\Delta B_0}\\ &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

因此有

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{\Phi}+\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{Q}_{\hat{b}_1\hat{b}_1}\overline{\boldsymbol{H}}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{Y}_{Z_0}-\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}})\\ &= \left(\frac{\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}}{n}\otimes\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\right)(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{Y}_{Z_0}-\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}})\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(\boldsymbol{z}_{i1}-\boldsymbol{z}_{i1,\mathrm{b}})\end{aligned}$$ □

式(10)表明,多基准站的作用之一是对偏差相关项进行了(加权)平均。由于 $\boldsymbol{z}_{i1,\mathrm{b}} = \mathrm{round}[\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\boldsymbol{\phi}_{i1}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}_{i1})-\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{b}_{i1}]$,其中相位观测量 $\boldsymbol{\phi}_{i1}$ 的精度可达毫米级,当 $|\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{b}_{i1}| < \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{sf}$(其中 $|\cdot|$ 表示取绝对值,$i=1,\cdots,n$)时,很容易使得 $\boldsymbol{Y}_{Z_{0,\mathrm{b}}} = \boldsymbol{Y}_{Z_0}$,此时 $\Delta\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}$。因此根据经验法则,当 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{B}_0$ 的影响小于半周时,可以认为先验基线偏差对模糊度浮点解没有影响。以全球定位系统(global positioning system, GPS)L1 或北斗导航卫星系统(BeiDou navigation satellite system, BDS)B1 频率为例进行简单分析,波长 $\lambda\approx 0.2$ m,由于差分视线向量矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的各元素小于 2,则有

$$|\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{b}_{i1}| < 0.2^{-1}\times 2\begin{bmatrix}|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,x}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,y}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,z}|\\ |\Delta\boldsymbol{b}_{i1,x}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,y}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,z}|\\ \vdots\\ |\Delta\boldsymbol{b}_{i1,x}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,y}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,z}|\end{bmatrix}$$

因此当 $|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,x}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,y}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,z}| < 0.05$ m 时,可以认为此时对模糊度解算无影响。

尽管基线偏差较大时会带来模糊度浮点解的偏差,但模糊度固定解仍可能保持较高成功率,解释如下:假设基线偏差导致有偏的模糊度浮点解服从高斯分布 $\hat{z}_1\sim\mathrm{N}(z_1+\Delta z,\ \boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1})$,则模糊度解算成功率[16]为

$$\begin{aligned}P(\breve{z}_1 = z_1) &= \int_{S_z}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sqrt{|\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}^{-1}|}\cdot\\ &\quad \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-z_1-\Delta z)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}_{\hat{z}_1\hat{z}_1}^{-1}(\boldsymbol{x}-z_1-\Delta z)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}\tag{15}$$

由式(15)可知,模糊度解算成功率等于模糊度浮点解的概率密度函数在归整域(积分区域)内的积分,由于基线偏差仅改变模糊度浮点解的

期望,而对其概率密度函数的形状没有影响,因此只要概率密度函数的中心轴 $z_1 + \Delta z$ 仍在归整域内,模糊度解算成功率就不会发生明显变化;一旦中心轴 $z_1 + \Delta z$ 接近甚至跨过积分边界,模糊度解算成功率将可能迅速下降。这一现象将会在后文的试验分析中得到验证。

4　试验结果分析

为了验证多基准站相对定位的性能,本节采用仿真数据和实测数据,计算和比较不同卫星数、不同先验基线偏差情况下的单基准站和多基准站单频单历元模糊度解算成功率。模糊度解算成功率通过解算正确的模糊度历元数除以总历元数计算得到。

4.1　仿真试验

试验选取 2018 年 4 月 13 日西安某一时刻的 BDS 卫星真实星座构型,通过蒙特卡洛仿真生成 10^5 个观测数据,仿真试验的设置如表 1 所示。分别采用单基准站和本文多基准站(基准站数量为 3)相对定位模型对数据进行处理,不同卫星数情况下的位置精度因子(position dilution of precision,PDOP)和平均 *ADOP* 值如图 1 所示;利用 LAMBDA 算法固定模糊度,统计不同可视卫星数情况下模糊度固定正确的样本数,计算模糊度解算成功率,结果如表 2 所示。然后在参考基线各分量中加入不同偏差,计算 3 基准站情况下的模糊度解算成功率,结果如表 3 所示。最后,为了分析 3 基准站对模糊度解算收敛速度的影响,统计了不同可视卫星数情况下的模糊度平均首次固定时间(time-to-first-fix,TTFF),结果如表 4 所示。试验中的平均 *TTFF* 通过下述方法计算得到:从第一个样本数据开始进行模糊度递推解算,当模糊度固定并通过 Ratio 检验(文中设定 *ratio* = 3)时,记录本次模糊度固定所用样本数,然后从第二

表 1　仿真试验设置

Tab. 1　Simulation setup

仿真条件	仿真设置
系统和频率	BDS B1
非差相位/伪距观测量噪声	2 mm / 0.2 m
模拟基准站数量	3
仿真样本数	10^5
模糊度解算方法	LAMBDA

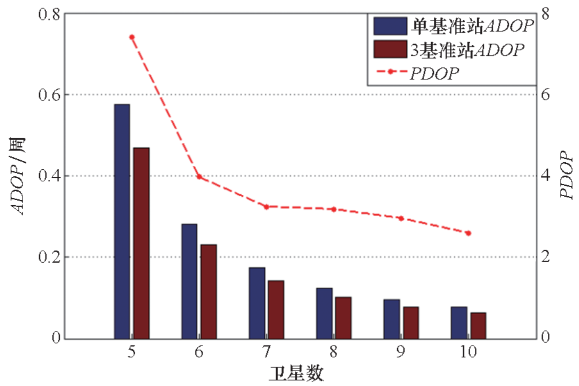

图 1　*PDOP* 与平均 *ADOP* 值

Fig. 1　The *PDOP* and average *ADOP* values

表 2　不同卫星数情况下的模糊度解算成功率

Tab. 2　Ambiguity resolution success rates for different number of satellites

%

卫星数	单基准站	3 基准站
5	6.83	13.13
6	39.59	60.59
7	83.66	95.12
8	96.59	99.54
9	99.66	99.98
10	99.95	100.00

表 3　不同偏差情况下 3 基准站情况模糊度解算成功率

Tab. 3　Ambiguity resolution success rates for 3-reference-station case with different biases

%

卫星数	1 ~ 5 cm 偏差	6 cm 偏差	7 cm 偏差
5	13.13	12.86	1.74
6	60.59	60.39	9.10
7	95.12	94.80	14.37
8	99.54	99.22	15.04
9	99.98	99.65	15.10
10	100.00	99.67	15.12

表 4　*ratio* = 3 时的平均 *TTFF* 值

Tab. 4　Average *TTFF* for *ratio* = 3

卫星数	单基准站	3 基准站
5	8.323	6.702
6	4.012	3.139
7	2.428	2.131
8	2.110	2.017
9	2.011	2.001
10	2.003	2.000

个样本开始，再次统计模糊度固定并通过 Ratio 检验所用样本数，如此往复，最终计算模糊度固定平均所用样本数，即为平均 *TTFF*。

由图 1 可知，可视卫星数和基准站数量的增加使得 *ADOP* 值减小，表明模糊度浮点解的平均精度得到提升，但前者作用更为明显，这是因为，由式(7)可知，卫星数 s 的影响作用于指数项，而基准站数量 n 的影响仅作用于乘项系数 $\sqrt{1+1/n}$。由表 2 可知，相比于单基准站情况，3 基准站的设置能有效提升模糊度解算成功率，当卫星数较少时，提升效果更为明显。由表 3 可知，当先验基线中偏差分量均在 5 cm 以内时，模糊度解算成功率未受影响；当偏差为 6 cm 时，模糊度解算成功率略微下降；当偏差达到 7 cm 时，模糊度解算成功率出现明显下降。这一变化情况与第 3 节中式(15)关于偏差的影响分析一致。由表 4 可以看出，随着基准站数量的增加，不同可视卫星数情况下的模糊度 *TTFF* 值得到不同程度的缩短，表明模糊度收敛速度获得提升，其原因是模糊度浮点解精度得到了提高。需要说明的是，表 4 中的 *TTFF* 实际对应的是达到 Ratio 检验时所用的平均仿真样本个数，并不与真实时间对应，仅用于反映模糊度收敛速度的快慢。

4.2　实测试验

为进一步验证算法对实测数据的适用性，选取 2018 年 4 月 17 日一段长度为 4 553 历元的实测静态数据进行试验，数据采样间隔为 1 s，卫星截止角设为 15°，试验场地为空军工程大学信息与导航学院科研楼楼顶，共放置 4 对 NovAtel 接收机和天线，接收机/天线型号分别为 OEM628/GPS702、OEM638/GPS703、OEM719/GPS702、OEM729/GPS703，天线之间距离若干米，天线间基线向量已提前精确标定。试验时段内共视 GPS 卫星数与 *PDOP* 的变化情况如图 2 所示。

首先分别计算单基准站和 3 基准站情况下的单频单历元模糊度和 *ADOP* 值，*ADOP* 的变化情况如图 3 所示。然后统计模糊度固定正确的样本数，计算模糊度解算成功率，结果显示，单基准站、3 基准站的模糊度解算成功率分别为 86.65%、94.71%。在此基础上，在参考基线各分量中分别添加不同偏差，计算 3 基准站情况的模糊度解算成功率，结果如表 5 所示。

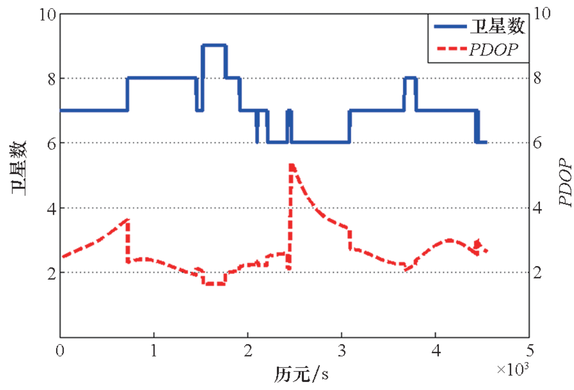

图 2　GPS 卫星数与 *PDOP* 变化情况

Fig. 2　Variation of number of GPS satellites and *PDOP* values

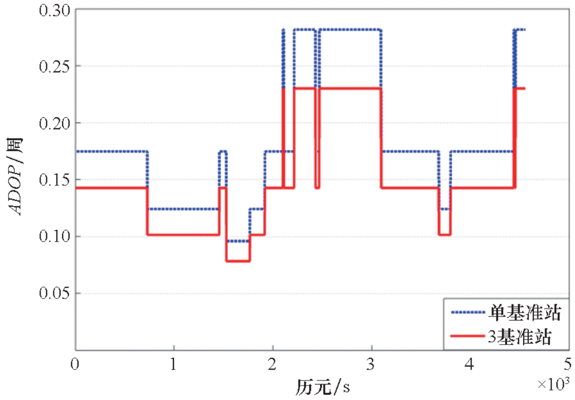

图 3　单基准站与 3 基准站解算时的 *ADOP* 值比较

Fig. 3　Comparison between the *ADOP* values of the solutions with single-reference-station and 3-reference-station

表 5　添加不同偏差时 3 基准站情况模糊度解算成功率

Tab. 5　Ambiguity resolution success rates for 3-reference-station case with different biases

%

偏差	1～3 cm 偏差	4 cm 偏差	5 cm 偏差	6 cm 偏差
成功率	94.71	92.07	50.30	34.74

图 3 表明，3 基准站相对定位的 *ADOP* 值始终小于单基准站的情况。由表 5 和表 6 可知，多基准站设置有助于模糊度解算成功率的提高，这与仿真数据结果基本一致，并且对先验基线中的小偏差（3 cm 以内，此时 $|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,x}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,y}|+|\Delta\boldsymbol{b}_{i1,z}|\leqslant 0.09$ m）具有较好的抑制效果；当偏差为 4 cm 时，模糊度解算成功率开始降低，但仍达到了 92% 以上；当偏差超过 5 cm 时，模糊度解算成功率发生明显下降。

5　结论

本文从理论分析和试验验证两方面对多基准站相对定位算法进行了研究，其核心是利用基准站之间可提前测量的先验基线信息提升相对定位模糊度解算的效果。理论分析方面，在给出多基准站相对定位模型的基础上，推导了 *ADOP* 的解析表达式，揭示了基准站数量的增加对模糊度浮点解精度的提升作用；然后进一步分析了先验基线向量中可能包含的偏差对模糊度解算的影响，分析表明，当偏差小于若干个厘米时，可以认为模糊度解算不受影响。试验验证方面，仿真和实测数据结果表明，相比于传统单基准站情况，多基准站的设置能够有效提升模糊度解算的可靠性和收敛速度，并且当先验基线信息中包含较小偏差时，仍能保持较高的模糊度解算成功率。多基准站相对定位所具有的抗偏差特性可为特殊场景下（如战时临时机场快速搭建）基准站间的快速非精确标定提供理论依据。

参考文献（References）

[1]　MA L Y, ZHU F, LIU W K, et al. VC-LAMBDA: a baseline vector constrained LAMBDA method for integer least-squares estimation[J]. Journal of Geodesy, 2022, 96(9): 1 – 14.

[2]　CHEN G E, LI B F, ZHANG Z T, et al. Integer ambiguity resolution and precise positioning for tight integration of BDS – 3, GPS, GALILEO, and QZSS overlapping frequencies signals[J]. GPS Solutions, 2022, 26(1): 26.

[3]　易彬，谷德峰，邵凯，等. BDS 在低轨卫星编队高精度相对轨道确定上的应用分析[J]. 国防科技大学学报，2020，42(4)：43 – 50.
YI B, GU D F, SHAO K, et al. Precise relative orbit determination of LEO formation flying using BDS[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2020, 42(4): 43 – 50. (in Chinese)

[4]　GAO M, LIU G Y, WANG S L, et al. Research on tightly coupled multi-antenna GNSS/MEMS single-frequency single-epoch attitude determination in urban environment [J]. Remote Sensing, 2021, 13(14): 2710.

[5]　WU S S, ZHAO X B, ZHANG L, et al. Improving reliability and efficiency of RTK ambiguity resolution with reference antenna array: BDS + GPS analysis and test[J]. Journal of Geodesy, 2019, 93(9): 1297 – 1311.

[6]　WU S S, ZHAO X B, PANG C L, et al. Improving ambiguity resolution success rate in the joint solution of GNSS-based attitude determination and relative positioning with multivariate constraints[J]. GPS Solutions, 2020, 24(1): 31.

[7]　刘子奇，臧欣蕊，贾春，等. 固定基线约束的低成本 GNSS 测向方法[J/OL]. 武汉大学学报（信息科学版），2023[2023 – 09 – 24]. https://doi.org/10.13203/j.whugis20220572.
LIU Z Q, ZANG X R, JIA C, et al. Low-cost GNSS heading determination with fixed baseline constraints [J/OL]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2023[2023 – 09 – 24]. https://doi.org/10.13203/j.whugis20220572. (in Chinese)

[8]　TEUNISSEN P J G. A-PPP: array-aided precise point positioning with global navigation satellite systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(6): 2870 – 2881.

[9]　GIORGI G, TEUNISSEN P J G, VERHAGEN S, et al. Instantaneous ambiguity resolution in global-navigation-satellite-system-based attitude determination applications: a multivariate constrained approach[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(1): 51 – 67.

[10]　LI B F, TEUNISSEN P J G. GNSS antenna array-aided CORS ambiguity resolution[J]. Journal of Geodesy, 2014, 88(4): 363 – 376.

[11]　KHODABANDEH A, TEUNISSEN P J G. Array-based satellite phase bias sensing: theory and GPS/BeiDou/QZSS results[J]. Measurement Science and Technology, 2014, 25(9): 095801.

[12]　伍劭实，赵修斌，庞春雷，等. 适用于北斗混合星座的相对定位随机模型建模策略[J]. 国防科技大学学报，2019，41(5)：43 – 48.
WU S S, ZHAO X B, PANG C L, et al. Stochastic modeling strategy for BDS hybrid constellation in relative positioning[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2019, 41(5): 43 – 48. (in Chinese)

[13]　TEUNISSEN P J G, ODOLINSKI R, ODIJK D. Instantaneous BeiDou + GPS RTK positioning with high cut-off elevation angles[J]. Journal of Geodesy, 2014, 88(4): 335 – 350.

[14]　TEUNISSEN P J G. The least-squares ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation[J]. Journal of Geodesy, 1995, 70(1): 65 – 82.

[15]　TEUNISSEN P J G. A canonical theory for short GPS baselines[J]. Journal of Geodesy, 1997, 71(6): 320 – 336.

[16]　TEUNISSEN P J G. Integer estimation in the presence of biases[J]. Journal of Geodesy, 2001, 75(7): 399 – 407.