

# 加权核范数最小化和改进小波阈值函数的图像去噪算法

郭昕刚,许连杰,程超\*,霍金花

(长春工业大学 计算机科学与工程学院,吉林 长春 130012)

**摘要:**针对加权核范数最小化算法存在结构残余噪声以及无法较好地保持图像边缘结构的问题,提出基于加权核范数最小化和改进小波阈值函数的图像去噪算法。利用全变分模型对噪声图像进行初步去噪,使用噪声图像与初步去噪后的图像进行差分运算,对差分后得到的噪声残差图像使用改进的小波阈值函数去噪,将小波去噪后的残差图像与初步去噪图像叠加,将叠加后的图像使用基于残余噪声水平迭代的加权核范数最小化算法进行二次去噪。相较于当下主流去噪算法,经该算法处理后的图像的PSNR和SSIM值均有所提升,能够更好地保持图像的纹理结构,且在高噪声环境下效果更佳。

**关键词:**加权核范数;小波变换;噪声残差;全变分

中图分类号:TP391 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号:1001-2486(2024)02-238-09



听语音  
与作者  
互动  
聊科研

## Image denoising algorithm based on weighted kernel norm minimization and improved wavelet threshold function

GUO Xingang, XU Lianjie, CHENG Chao\*, HUO Jinhua

(School of Science and Engineering, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China)

**Abstract:** In view of the structural residual noise in the weighted nuclear norm minimization algorithm and the inability to maintain the edge structure of the image, a denoising method that minimizes the weighted kernel norm and improves the wavelet threshold was adopted. The total variation model to perform preliminary denoising of the noise image, and the noisy image to subtract the preliminary denoised image were used. An improved wavelet threshold function was used to denoise the noise difference image obtained after subtraction. The denoised residual image was superimposed with the preliminary denoised image, and the superimposed image was finally denoised using an iterative weighted kernel norm minimization algorithm based on the residual noise level. Compared with the more popular denoising algorithms, the PSNR and SSIM processed by this algorithm are improved, the texture structure of the image can be maintained, and the effect is better in a high-noise environment.

**Keywords:** weighted kernel norm; wavelet transform; noise residual; total variation

在采集和传输图像时,由于外部环境和设备而造成的噪声会使图像视觉质量变差,降低后续图像处理流程的性能。噪声去除的同时保留纹理结构是图像去噪问题的关键与难点。当前图像去噪算法可大致分为空间域、变换域和混合域方法。

空间域方法操纵图像一个平面中像素的强度值。经典的如中值滤波<sup>[1-2]</sup>、均值滤波<sup>[3]</sup>、自适应中值滤波<sup>[4-5]</sup>等,这些滤波器的局限性是不能维持噪声去除和边缘保持之间的平衡。近年来,非局部均值<sup>[6]</sup>(non-local means, NLM)滤波方法被大量关注使用,它采用的理论依据是图像中通常有许多相似的面片,可以应用它们之间的联系来进行图像处理。

变换域滤波器将图像信号转变到其他域,并滤除变换后比较突出的噪声信号,对滤除噪声后的图像信号采取反变换便可获得去噪后的图像。近年来,小波变换因为其时频分离性、稀疏性和多分辨率特性而越来越受到图像去噪研究人员的关注<sup>[7-9]</sup>。基于小波变换的去噪方法的主要目标是建立最优的小波阈值函数,以最小的边缘信息损失来去除图像中的噪声。

空间域去噪算法能够在部分程度上去除噪声,但无法避免会丢失图像的纹理结构。频域去噪算法能够有效地保护图像纹理细节,但图像边缘区域信息仍然会受到破坏。为了克服单个滤波器的缺点,Dabov等<sup>[10]</sup>提出了三维块匹配滤波器

收稿日期:2021-12-30

基金项目:吉林省教育厅基金资助项目(JKH20210754KJ)

第一作者:郭昕刚(1979—),男,吉林长春人,副教授,硕士,硕士生导师,E-mail:6889068@qq.com

\*通信作者:程超(1984—),男,吉林长春人,副教授,博士,博士生导师,E-mail:125725673@qq.com

(block matching 3D collaborative filtering, BM3D), 该滤波器很好地结合图像的非局部自相似性来去除噪声。Zhang 等<sup>[11]</sup>提出了一种混合滤波器使用 DWT 和快速双边滤波器进行去噪。近年来, 基于低秩的去噪算法在去除自然图像的加性噪声方面显示出巨大的潜力。Gu 等<sup>[12]</sup>提出了加权核范数最小化 (weighted nuclear norm minimization, WNNM) 算法来对自然图像进行去噪。将 WNNM 应用于非局部相似斑块的群矩阵, 逼近低秩去噪的群矩阵, 每个像素都存在于多个去噪的群矩阵中。Xie 等<sup>[13]</sup>在 WNNM 算法的基础上利用改进的加权函数对奇异值进行正则化, 可以更好地去除噪声, 但会使图像过于平滑。

上述图像去噪算法都取得了很好的去噪性能, 其中 WNNM 算法是目前性能最好的算法之一。但是 WNNM 算法在噪声水平比较高的环境下, 会丢失图像的边缘结构信息, 同时在噪声水平分布不均的情况下还会使图像过于平滑, 并引入虚假信息与伪影。针对以上问题, 提出一种结合 WNNM 与改进小波阈值函数的图像去噪算法。利用全变分 (total variation, TV) 模型对噪声图像进行初步去噪, 使用噪声图像与初步去噪后的图像进行差分运算, 对差分后得到的噪声残差图像使用改进的小波阈值函数去噪, 将小波去噪后的残差图像与初步去噪图像叠加, 将叠加后的图像使用基于残余噪声水平迭代的 WNNM 算法进行二次去噪。

## 1 理论基础

### 1.1 全变分去噪原理

全变分模型能够保持清晰的边缘和物理边界, 有很好的去噪性能。TV 模型通过图像本身的正则性, 从被噪声污染的图像的解中提取干净图像的特性。

设  $f$  为干净的图像,  $f_0$  为噪声图像, 即

$$f_0(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

式中,  $n$  是高斯噪声,  $n$  的均值为 0、方差为  $\sigma^2$ , 图像区域为  $\Omega$ 。因为干净图像的全变分远小于被噪声污染后的图像的全变分, 所以最小化全变分能够去除噪声。最小化问题如下:

$$\min TV(f) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla f|^2} dx dy = \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (2)$$

满足约束条件:

$$\int_{\Omega} f dx dy = \int_{\Omega} f_0 dx dy \quad (3)$$

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (f - f_0)^2 dx dy = \sigma^2 \quad (4)$$

式(2)的最小化模型可以等价于:

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (f - f_0)^2 dx dy + \int_{\Omega} \sqrt{f_x^2 + f_y^2} dx dy \quad (5)$$

式(5)中: 第一项是保真项, 可降低图像失真度; 第二项是正则化项, 用来保证平滑效果。与此对应的欧拉-拉格朗日方程表示为:

$$-\nabla \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|} + \lambda(f - f_0) = 0 \quad (6)$$

式中,  $\frac{1}{|\nabla f|}$  为扩散系数。在图像边缘  $|\nabla f|$  偏大, 则对应的扩散系数偏小, 所以边缘部分扩散较弱, 可以更好地保持纹理结构; 与之对应的是平滑部分  $|\nabla f|$  偏小, 则扩散系数偏大, 所以平滑部分扩散能力较强, 基于此原理便可去除图像中的噪声。

### 1.2 WNNM 算法

对于噪声图像, 先确定它的某个局部面片, 在图像的特定范围中搜索它的相似块, 把它们聚集为一个矩阵, 记为  $Y_j$ 。令  $Y_j = X_j + Z_j$ 。式中:  $X_j$  是清晰图像块, 是一个低秩矩阵;  $Z_j$  是噪声块。之后采取 WNNM 算法来完成低秩矩阵的还原。WNNM 函数可以表示为:

$$\hat{X}_j = \arg \min_{X_j} \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y_j - X_j\|_F^2 + \|X_j\|_{w,*} \quad (7)$$

式中:

$$\|X_j\|_{w,*} = \sum_i |w_i \sigma_i(X_j)|_1 \quad w = [w_1, \dots, w_n] \quad (8)$$

其中,  $w_i \geq 0$  是  $\sigma_i(X_j)$  的权重,  $w_i$  的计算式为:

$$w_i = c \sqrt{n} / (\sigma_i(X_j) + \varepsilon) \quad (9)$$

式中,  $c$  为大于 0 的常数,  $n$  为  $Y_j$  中相似图像块的个数,  $\varepsilon = 10^{-16}$  的作用是避免除数为零。之后使用奇异值分解得到全局最优解, 即

$$UAV^T = S(\hat{X}_j) \quad (10)$$

$$\Lambda_w = S_w(A) = \max(\sigma_i(X_j) - w, 0) \quad (11)$$

如果噪声在  $U$  和  $V$  两个空间中分配均匀, 则初始的  $\hat{\sigma}_i(X_j)$  可以估计为:

$$\hat{\sigma}_i(X_j) = \sqrt{\max(\sigma_i^2(Y_j) - n\sigma_n^2, 0)} \quad (12)$$

式中,  $\sigma_i(X_j)$  表示  $Y_j$  的奇异值。

### 1.3 小波变换去噪原理

小波变换后的图像与噪声分布在不同的幅值范围。小波变换后图像干净信息对应的小波系数整体都比较大, 相反噪声对应的系数都比较小。因此, 可以建立适当的阈值。如果小波系数大于

该阈值则判断为是一个可用的信息,主成分可以被压缩和保留。相反,如果主成分是噪声,则可以将其删除到零。

保证去噪性能的重要因素在于选取合适的阈值和设置合理的阈值函数。为了计算方便,采用一个固定的阈值,公式如下:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2\ln(M)} \quad (13)$$

式中: $\lambda$  是固定阈值; $M$  为分解图像的尺寸大小; $\sigma$  为噪声强度,可使用式(14)计算。

$$\sigma = \text{median}\left[\frac{|k|}{0.6745}\right] \quad k \in H \quad (14)$$

式中, $H$  是小波分解后的对角系数。

硬阈值函数和软阈值函数是当前两种公认的效果比较好的阈值函数。

软阈值函数:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{j,k}) \cdot (|\omega_{j,k}| - \lambda) & |\omega_{j,k}| > \lambda \\ 0 & |\omega_{j,k}| \leq \lambda \end{cases} \quad (15)$$

硬阈值函数:

$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \omega_{j,k} & |\omega_{j,k}| > \lambda \\ 0 & |\omega_{j,k}| \leq \lambda \end{cases} \quad (16)$$

其中, $\hat{\omega}_{j,k}$  为图像经小波分解之后估计的高频系数。

## 2 算法原理分析

本文的去噪算法流程如图 1 所示,可分为以下几个阶段来实现。

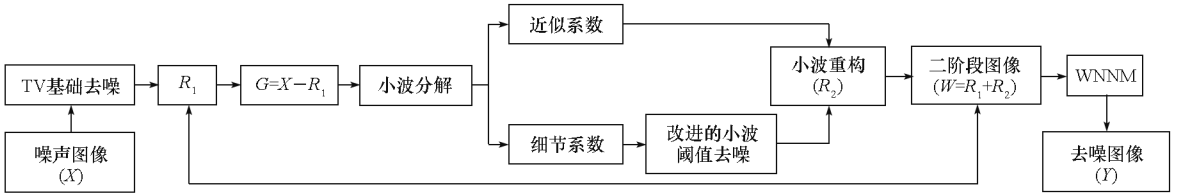


图 1 本文算法流程图

Fig. 1 Algorithm flow chart of this paper

### 2.1 基于全变分模型初步去噪

在第一阶段,对噪声图像  $X$  使用 TV 模型进行基础去噪,得到基础去噪后的图像  $R_1$ 。在滤除噪声的同时利用了 TV 模型的边缘保持能力,用以保留图像的纹理结构。

使用噪声图像  $X$  减去基础去噪图像  $R_1$ ,得到噪声差分图像  $G$ 。 $G$  中包含 TV 模型去除的噪声以及忽略的边缘结构<sup>[14-16]</sup>,在 2.2 节中使用小波变换对差分图像  $G$  进行噪声去除以及边缘保持。

### 2.2 改进的小波阈值函数对差分图像去噪

传统的硬阈值函数和软阈值函数都有很好的去噪性能,但都一定的问题。软阈值函数拥有良好的连续性,但当高频系数大于所设定的阈值时,会产生永久性的偏差,边缘区域会被模糊和扭曲。硬阈值函数可以保留图像的纹理结构,不会产生软阈值函数的常数误差问题,但是在不连续点处会产生跳跃点,进而在恢复图像时产生振荡效应。

本文针对硬阈值函数和软阈值函数的优缺点,采用了一种新的阈值函数,公式如下:

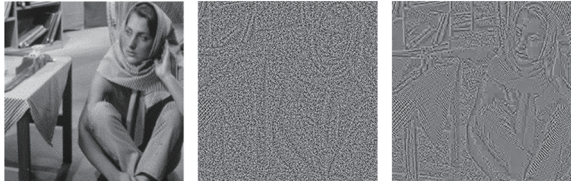
$$\hat{\omega}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{j,k}) \cdot (|\omega_{j,k}| - 0.6\lambda) & |\omega_{j,k}| > \lambda \\ \text{sgn}(\omega_{j,k}) \cdot [\lambda / (\lambda - 0.7\lambda)] \cdot (|\omega_{j,k}| - 0.6\lambda) & 0.7\lambda \leq |\omega_{j,k}| \leq \lambda \\ 0 & |\omega_{j,k}| < 0.7\lambda \end{cases} \quad (17)$$

本文改进的阈值函数设置  $0.7\lambda$  和  $\lambda$  为两个分界点。若高频系数大于阈值  $\lambda$ ,则将计算的高频系数设为小波分解后的高频系数与  $0.6$  倍阈值  $\lambda$  的差值。与软阈值函数相比,改进的阈值函数可以很好地修正软阈值函数造成的永久性误差。对于  $0.7\lambda$  至  $\lambda$  之间的系数,通过滤除  $\lambda$  附近的临界系数,可以尽可能保留细节,防止硬阈值函数引起的图像振荡。若高频系数小于  $0.7\lambda$ ,将高频系数设为零。

与之前的阈值函数不同,改进的阈值函数采用了三段式处理,能更好、更完整地分离高频系数。利用改进的阈值函数处理分离出的高频系数,可以滤除图像中的噪声,然后对得到的高频系数采取反变换,对图像细节进行重构和恢复。

将噪声残差图像变换到小波域,分为近似系数和细节系数两部分。近似系数通常包含了信号的低频信息,细节系数则包含了信号的高频信息。通过小波理论<sup>[17-18]</sup>可知图像的噪声绝大部分都存在于细节系数中,所以本文算法对细节系数使用改进的阈值函数进行噪声去除,阈值可由式(13)得到。

噪声图像的高频部分由高斯噪声和图像细节组成,改进的阈值函数能够消除大部分噪声。改进后的小波去噪效果如图 2 所示。可以看到,经小波去噪后,残差图像中大部分噪声都被去除了,



(a) 原图 (b) 噪声残差 (c) 滤波后图像  
(a) Original image (b) Noise residual (c) Filtered image

图2 经小波处理的噪声残差图像

Fig. 2 Noise residual image processed by wavelet

同时图像的纹理结构几乎没有丢失。将小波重构后得到的图像  $R_2$  与使用 TV 模型去噪得到的图像  $R_1$  叠加,得到二阶段的图像  $W$ 。采用小波鲁棒中值估计方法<sup>[19]</sup>估计图像  $W$  的噪声水平,利用估计的噪声方差来归一化 WNNM 算法中  $F$  范数的保真项,采用 WNNM 算法对二阶段图像进行最终的去噪处理。

### 2.3 改进的 WNNM 对二阶段图像进行去噪

传统的 WNNM 算法需要通过多次迭代来取得最终的结果,不同的迭代次数会有不同的去噪效果,4 幅不同图像的迭代次数与峰值信噪比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) 的关系如图 3 所示。实验采用 Set12 数据集中的图像,统一采用  $\sigma = 40$  的高斯噪声强度作为测试环境。从图 3 结果来看,在相同的噪声强度下,不同图像达到最佳的信噪比时所需的迭代次数是不同的,但是 WNNM 算法给予所有相同噪声强度的图像相同的迭代次数。对一张噪声图像来说:如果迭代次数过少,会有残余的结构噪声;如果迭代次数过多,则会使图像过于平滑。

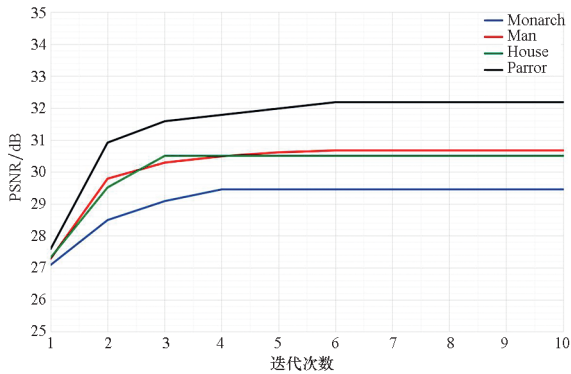


图3 WNNM 去噪图像峰值信噪比与迭代次数关系图

Fig. 3 Relationship between WNNM denoising image PSNR ratio and iteration times

针对此问题,采用了一种基于剩余噪声水平的迭代停止准则。WNNM 每次迭代都需要提前估计噪声,将第  $k$  次迭代中滤波噪声和残余噪声

的标准差分别表示为:

$$(\sigma_{\text{fil}}^{(k)})^2 = \|\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_j^{(k)}\|_2 \quad (18)$$

$$(\sigma_{\text{res}}^{(k+1)})^2 = [\gamma \sqrt{\sigma_n^2 - (\sigma_{\text{fil}}^{(k)})^2}]^2 \quad (19)$$

式中,常数  $\gamma > 0$  是一个比例因子,  $\sigma_n$  为噪声强度。

将式(12)进行如下调整:

$$\sigma_i(\mathbf{X}_j^{(k+1)}) = \sqrt{\max(\sigma_i^2(\mathbf{Y}_j^{(k)}) - n(\sigma_{\text{res}}^{(k+1)})^2, 0)} \quad (20)$$

这里使用所有图像块残差噪声估计的平均值来作为每次迭代后整个图像的全局残差噪声估计,即:

$$G(\sigma_{\text{res}}^{(k)}) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{TN} \sigma_{\text{res}}^{n,(k)} \quad (21)$$

式中,  $G(\sigma_{\text{res}}^{(k)})$  表示第  $n$  个图像补丁经过  $k$  次迭代后的残余噪声估计,  $T$  表示图像补丁的总数量。

$$|G(\sigma_{\text{res}}^{(k+1)}) - G(\sigma_{\text{res}}^{(k)})| / \sigma_n^2 \leq \xi \quad \xi = 0.001 \quad (22)$$

利用式(22)作为迭代去噪算法的停止准则。设  $x$  为无噪图像,  $y$  为二阶段图像。改进 WNNM 算法的去噪流程如算法 1 所示。

#### 算法 1 WNNM 算法去噪流程

Alg. 1 WNNM algorithm denoising process

输入: 二阶段图像  $y$

输出: 去噪后图像  $x$

1. 初始化  $\hat{x}^{(0)} = y, y^{(0)} = y$
2. **while**  $|G(\sigma_{\text{res}}^{(k+1)}) - G(\sigma_{\text{res}}^{(k)})| / \sigma > \xi$  **do**
3. 正则化  $y^{(k)} = \hat{x}^{(k-1)} + \delta(y - \hat{y}^{(k-1)})$
4. **for** 对  $y^{(k)}$  中每个子块  $\mathbf{y}_j$  **do**
5. 寻找其相似子块组  $\mathbf{Y}_j$
6. 估计权重向量  $\mathbf{w}$
7. 奇异值分解  $[\mathbf{U}, \mathbf{A}, \mathbf{V}] = S(\mathbf{Y}_j)$
8. 得到估计值:  $\hat{\mathbf{X}}_j = \mathbf{U} \mathbf{S}_w(\mathbf{A}) \mathbf{V}^T$
9. **end**
10. 聚集  $\hat{\mathbf{X}}_j$  得到干净的图像  $\hat{x}^{(k)}$
11. **end**

综上所述,本文的算法流程首先利用 TV 模型对噪声图像进行基础去噪,使用噪声图像与基础去噪后的图像做差分运算,对差分后得到的噪声残差图像使用改进的小波阈值函数滤除噪声,保留边缘结构;然后将小波重构后的残差图像与 TV 降噪后的图像叠加,将叠加后的图像使用基于残余噪声水平迭代的 WNNM 算法进行二次去噪。本文算法的优势特点在于:

1) TV 模型和改进的小波阈值函数都有很好

的边缘保持特性,经过二者处理后的叠加图像中去除了大部分噪声,同时图像的纹理结构得到了很好的保持,因此在噪声水平比较高时依然可以有良好的去噪性能。

2) 基于残余噪声水平迭代的 WNNM 算法可以根据图像中剩余的平均噪声水平自适应地选择合适的迭代次数,避免了 WNNM 算法因图像中噪声分布不均而导致去噪结果中有结构残余噪声或者图像过于平滑的现象。

### 3 对比实验分析

为了验证本文算法的去噪性能,将本文的算法与当前效果最好的几种方法进行比较,其中包括快速非局部均值<sup>[20]</sup> (fast non-local mean, FNLM) 滤波、BM3D、WNNM、基于块聚类的低秩正则化聚类法<sup>[21]</sup> (patch clustering based low-rank regularization, PCLR)、非局部中心化稀疏表示法<sup>[22]</sup> (nonlocally centralized sparse representation, NCSR)。测试环境为: Intel (R) Core (TM) i5-6200U CPU, RAM = 8 GB, 仿真软件为 MATLAB2014a, 本文实验的图像大小都设定为 256 像素 × 256 像素,同时设定均值为 0, 标准差  $\sigma$

分别为 20、40、60 和 100 的高斯白噪声环境。实验中采用 PSNR 和结构相似度 (structural similarity, SSIM) 值作为评价指标。

#### 3.1 经典灰度图像实验

选用了图像处理经典的 Set12 数据集来进行仿真实验。几种算法客观评价指标对比结果如表 1 所示,其中加黑的为最高值。从实验结果来看,与几种算法相比,本文算法的 PSNR 和 SSIM 平均值都取得了较好的结果。NCSR 算法在低噪声水平的情况下的 PSNR 与本文算法有一定竞争力,但是随着噪声水平的增大,本文算法要优于 NCSR 算法。相较于四种噪声水平下表现较好的 WNNM 和 BM3D 算法,本文的 PSNR 平均值依然可以提高 0.4 ~ 1.3 dB。对于 Lena 和 Barbara 这样纹理结构比较复杂的图像, FNLM、BM3D 和 PCLR 算法的 PSNR 和 SSIM 值都比较差,而本文算法依然有比较高的客观指标。在  $\sigma = 60$  和  $\sigma = 100$  这些高水平噪声的环境下,随着噪声水平的增加,另外几种算法的 PSNR 和 SSIM 值都下降较快,相比之下,本文算法的 PSNR 和 SSIM 值下降幅度较为平缓。

表 1 几种算法的 PSNR(SSIM) 值

Tab.1 PSNR (SSIM) values of various algorithms

图像	算法	$\sigma = 20$		$\sigma = 40$		$\sigma = 60$		$\sigma = 100$	
		PSNR/dB	SSIM	PSNR/dB	SSIM	PSNR/dB	SSIM	PSNR/dB	SSIM
Cameraman	FNLM	29.03	0.848 1	26.24	0.782 4	24.37	0.715 4	20.17	0.619 1
	BM3D	29.77	0.872 1	26.85	0.826 3	24.74	0.789 6	23.07	0.691 7
	PCLR	30.01	0.881 6	26.91	0.832 5	25.13	0.804 9	22.67	0.750 0
	WNNM	30.33	0.880 1	27.16	0.835 7	25.25	0.804 0	23.36	0.744 0
	NCSR	30.37	0.883 5	27.10	0.834 5	25.30	0.796 4	22.93	0.705 4
	本文算法	<b>30.57</b>	<b>0.885 5</b>	<b>27.40</b>	<b>0.847 2</b>	<b>25.68</b>	<b>0.819 2</b>	<b>23.52</b>	<b>0.769 4</b>
Lena	FNLM	29.93	0.842 4	26.42	0.740 1	24.60	0.679 3	22.56	0.578 1
	BM3D	30.89	0.864 5	27.48	0.784 4	25.70	0.733 6	23.71	0.646 1
	PCLR	30.81	0.866 3	27.57	0.795 2	25.84	0.748 6	23.86	0.672 8
	WNNM	30.80	0.865 6	27.70	0.793 4	26.03	0.749 2	24.02	0.673 6
	NCSR	<b>31.11</b>	0.871 3	27.79	<b>0.800 4</b>	26.00	0.739 0	23.80	0.671 2
	本文算法	31.06	<b>0.872 6</b>	<b>27.81</b>	0.795 2	<b>26.14</b>	<b>0.762 5</b>	<b>24.40</b>	<b>0.689 1</b>
Boat	FNLM	27.50	0.878 2	25.69	0.785 0	23.60	0.730 1	19.47	0.511 6
	BM3D	28.94	0.889 9	26.10	0.853 1	23.94	0.807 7	21.99	0.625 5
	PCLR	28.58	0.873 9	26.02	0.878 0	23.89	0.831 5	22.26	0.636 8
	WNNM	29.40	0.884 1	26.13	0.874 9	24.01	<b>0.837 4</b>	22.34	0.756 6
	NCSR	29.36	0.881 8	25.99	0.873 1	24.26	0.831 7	22.53	0.756 1
	本文算法	<b>29.59</b>	<b>0.891 2</b>	<b>26.26</b>	<b>0.889 2</b>	<b>24.45</b>	0.836 6	<b>22.92</b>	<b>0.777 8</b>



续表

图像	算法	$\sigma = 20$		$\sigma = 40$		$\sigma = 60$		$\sigma = 100$	
		PSNR/dB	SSIM	PSNR/dB	SSIM	PSNR/dB	SSIM	PSNR/dB	SSIM
Peppers	FNLM	30.17	0.861 0	26.42	0.787 4	24.23	0.722 5	21.46	0.583 2
	BM3D	31.29	0.885 0	27.70	0.815 4	25.81	0.765 6	22.99	0.684 2
	PCLR	31.33	0.886 3	28.05	0.824 2	26.06	0.774 1	23.16	0.689 7
	WNNM	31.47	0.887 5	28.08	0.822 1	26.12	0.784 5	23.49	0.716 1
	NCSR	31.42	0.885 2	27.99	0.824 2	26.00	0.771 3	23.40	0.688 0
	本文算法	<b>31.56</b>	<b>0.895 4</b>	<b>28.12</b>	<b>0.832 9</b>	<b>26.17</b>	<b>0.796 9</b>	<b>23.87</b>	<b>0.730 8</b>
Barbara	FNLM	29.13	0.844 6	25.49	0.708 9	23.67	0.617 8	21.85	0.531 7
	BM3D	29.47	0.885 4	26.89	<b>0.805 4</b>	24.64	0.703 1	21.96	0.603 4
	PCLR	30.10	0.882 9	26.66	0.776 3	24.89	0.708 1	22.74	0.602 4
	WNNM	30.29	0.876 9	26.70	0.785 0	24.82	0.689 3	22.83	0.610 2
	NCSR	30.28	0.879 6	26.50	0.790 0	24.93	0.681 4	22.77	0.601 2
	本文算法	<b>30.52</b>	<b>0.890 2</b>	<b>27.11</b>	0.804 4	<b>25.21</b>	<b>0.714 2</b>	<b>23.21</b>	<b>0.626 2</b>
平均值	FNLM	29.15	0.856 8	26.05	0.760 7	24.09	0.693 0	21.10	0.564 7
	BM3D	30.07	0.879 4	27.00	0.816 9	24.97	0.759 9	21.74	0.650 2
	PCLR	30.16	0.878 2	27.04	0.821 2	24.96	0.773 4	22.94	0.670 3
	WNNM	30.46	0.878 8	27.15	0.822 2	25.24	0.772 9	23.21	0.700 1
	NCSR	30.49	0.880 2	27.07	0.824 4	25.30	0.764 0	23.09	0.684 4
	本文算法	<b>30.66</b>	<b>0.886 9</b>	<b>27.34</b>	<b>0.833 8</b>	<b>25.53</b>	<b>0.785 9</b>	<b>23.58</b>	<b>0.718 7</b>

为了体现去噪图像的直观视觉效果,图 4~7 显示了各个去噪算法去噪结果的整体图像和局部细节对比图像。其中图 4 是 Boat 图像在  $\sigma = 60$  环境下几种算法去噪后的结果,图 5 为其局部细节放大图。图 6 是 Cameraman 图像在  $\sigma = 100$  的高噪声环境下几种算法去噪后的结果,图 7 为其局部细节放大图。

从两幅图像的整体图像实验结果来看,在中高水平的噪声环境下, FNLM 去噪图像的纹理细节已经开始模糊, BM3D 和 PCLR 的去噪图像中会存在残余噪声,而 WNNM 和 NCSR 去噪后的图像都会出现过平滑的现象。相比较之下,本文算法能够有较为清晰的整体视觉观感。

从图像的局部细节对比结果来看,对于 Boat 图像中的船帆, FNLM 算法几乎已经无法看清轮廓,且伴有大量的残余噪声。 BM3D 和 NCSR 算法只能看到大致的轮廓,无法看到船帆的细节。 PCLR 和 WNNM 算法可以看到船帆的细节,但是其中都会有伪影出现。对于 Cameraman 图像中的相机白线, FNLM、BM3D、NCSR 算法只能复原出大致轮廓,而 WNNM 和 PCLR 算法同样有残余噪声和部分伪影存在。相比之下,本文算法可以得到一个较为清晰平滑的细节图像。



图 4 Boat 图像整体去噪效果对比图  
Fig. 4 Comparison chart of overall denoising effect of Boat image

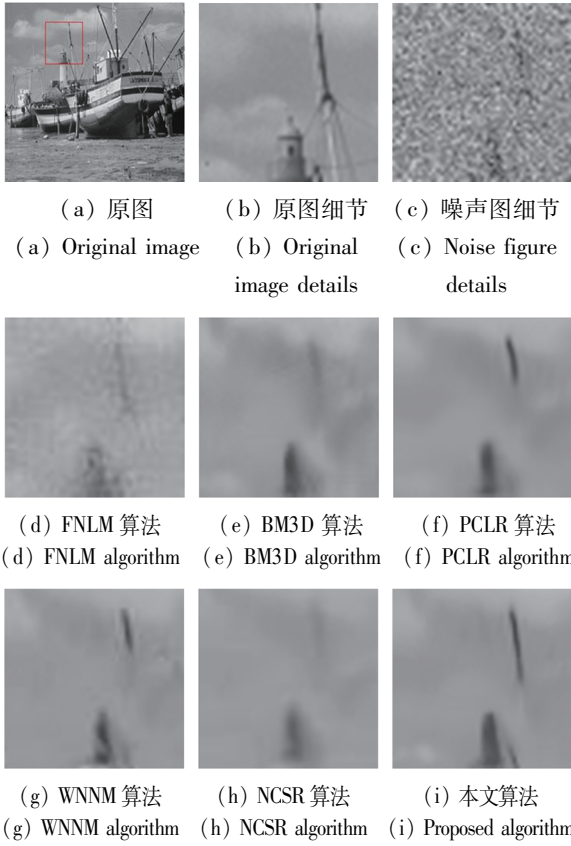


图 5 Boat 图像局部细节去噪效果对比图  
Fig. 5 Comparison of local details of Boat image denoising effect

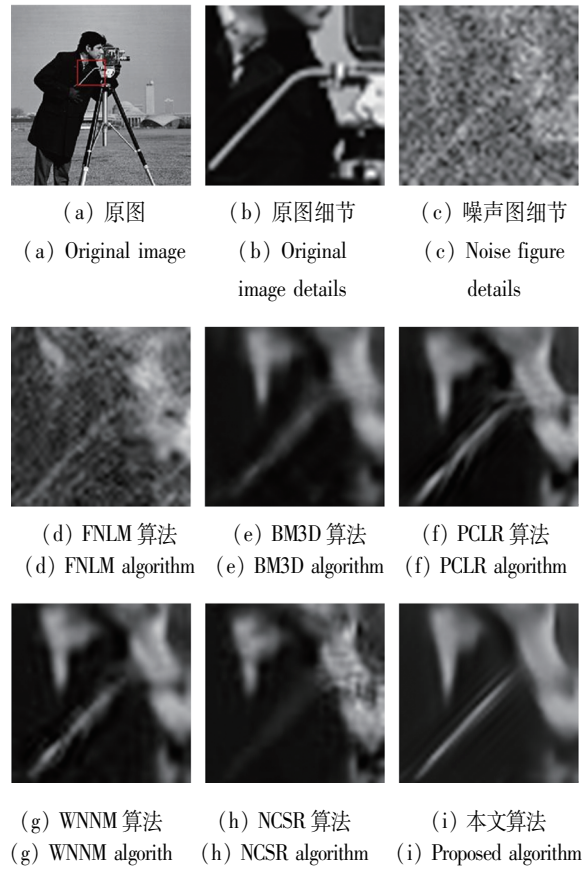


图 7 Cameraman 图像局部细节去噪效果对比图  
Fig. 7 Cameraman image partial detail denoising effect comparison chart

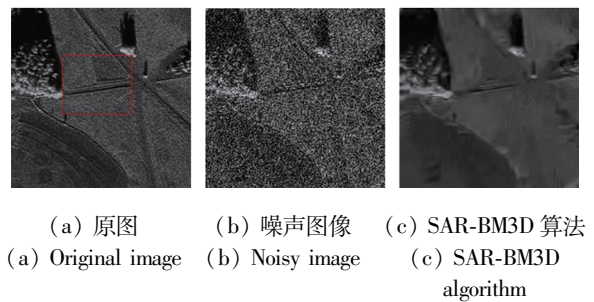


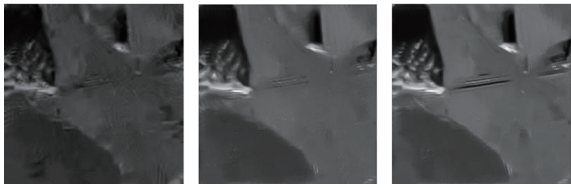
图 6 Cameraman 图像整体去噪效果对比图  
Fig. 6 Cameraman image overall denoising effect comparison chart

### 3.2 实际遥感图像应用

为验证本文算法的实用性,采用美国国防研究院支持的 MSTAR 数据集集中的 SAR 图像作为仿真图像,给干净的 SAR 图像添加  $\sigma = 40$  的乘性噪声,使用在遥感图像去噪领域效果比较好的概率补丁 (probabilistic patch-based, PPB) 迭代滤波法<sup>[23]</sup>、SAR-BM3D<sup>[24]</sup>和 WNNM 算法作为对比,实验结果如图 8 所示。

从图 8 的对比结果可以看出,本文算法相较于其他三种算法有更好的整体视觉效果,本文算法也能够更好恢复图像中的细节纹理结构。图 9 为上述几种算法在各个噪声强度下 SAR 去噪图像的 PSNR 值,从图中结果来看,相较于其他算法,本文算法在





(d) PPB 算法 (e) WNNM 算法 (f) 本文算法  
(d) PPB algorithm (e) WNNM algorithm (f) Proposed algorithm

图8 SAR 图像去噪效果对比图

Fig.8 SAR image denoising effect comparison chart

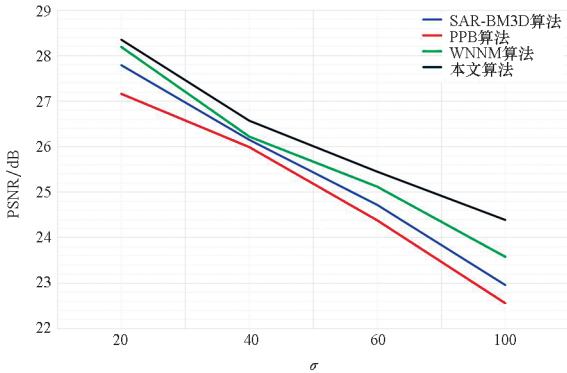


图9 SAR 去噪图像的 PSNR 值

Fig.9 PSNR value of SAR denoised image

所有噪声水平下都有不同程度的提升,且在  $\sigma = 100$  的高噪声水平下有更好的表现。

## 4 结论

本文提出了一种基于加权核范数最小化和改进小波阈值函数的图像去噪算法。利用全变分模型的边缘保持能力对噪声图像进行初步去噪,使用噪声图像与初步去噪后的图像进行差分运算,对差分后得到的噪声残差图像使用改进的小波阈值函数去噪,改进的三段式小波阈值函数可以更好地去除图像中的高斯噪声,同时可以更好地保留边缘结构信息,将小波去噪后的残差图像与初步去噪图像叠加,将叠加后的图像使用基于残余噪声水平迭代的加权核范数最小化算法进行二次去噪,避免了因噪声分布不均产生的图像过于平滑的问题。实验结果表明,本文算法能够更好地保持图像的纹理结构,同时在高噪声的环境下表现更佳。

## 参考文献 (References)

[1] MAHESWARI D, RADHA V. Noise removal in compound image using median filter [J]. International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering, 2010, 2(4): 1359-1362.

[2] PRAJWALASIMHA S N, SAHANA G C, VAANI K. Fingerprint image denoising in spatial domain: an implementation based on a combined median and average filtering approach [J]. International Journal of Advanced Science and Technology, 2020, 29(3): 13559-13572.

[3] ERKAN U, THANH D N H, HIEU L M, et al. An iterative mean filter for image denoising[J]. IEEE Access, 2019, 7: 167847-167859.

[4] WANG Y B, HUANG H L. Image denoising based on adaptive sector rotation median filter[C]//Proceedings of the 5th International Conference on Computer Science and Information Engineering, 2021, 1769(1): 012056.

[5] GARG B. An adaptive minimum-maximum value-based weighted median filter for removing high density salt and pepper noise in medical images [J]. International Journal of Ad Hoc and Ubiquitous Computing, 2020, 35(2): 84-95.

[6] BUADES A, COLL B, MOREL J M. A non-local algorithm for image denoising [C]//Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005: 60-65.

[7] XI J H, TANG L. Image denoising method based on improved wavelet threshold transform [C]//Proceedings of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI), 2019: 1064-1067.

[8] KAUR S, SINGLA J, NIKITA, et al. Review on medical image denoising techniques [C]//Proceedings of the International Conference on Innovative Practices in Technology and Management (ICIPTM), 2021: 61-66.

[9] 张一, 成礼智. 一种基于自适应阈值估计算法的 SAR 图像去噪方法 [J]. 国防科技大学学报, 2011, 33(2): 60-62.

ZHANG Y, CHENG L Z. SAR image denoising based on adaptive threshold estimation method [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2011, 33(2): 60-62. (in Chinese)

[10] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095.

[11] ZHANG J, LIN G K, WU L L, et al. Wavelet and fast bilateral filter based de-speckling method for medical ultrasound images [J]. Biomedical Signal Processing and Control, 2015, 18: 1-10.

[12] GU S H, ZHANG L, ZUO W M, et al. Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising [C]//Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2014: 2862-2869.

[13] XIE Y, GU S H, LIU Y, et al. Weighted Schatten  $p$ -norm minimization for image denoising and background subtraction [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(10): 4842-4857.

[14] DIWAKAR M, KUMAR P, SINGH A K. CT image denoising using NLM and its method noise thresholding [J]. Multimedia Tools and Applications, 2020, 79(21/22): 14449-14464.

[15] ZHENG X, FU B, ZHAO X L, et al. Denoising algorithm



- based on bilateral filtering and improved wavelet threshold function [C] // Proceedings of the International Conference on Artificial Intelligence, Information Processing and Cloud Computing, 2019: 1–5.
- [16] 朱豪, 路锦正. 结合加权核范数与全变分的图像二级去噪 [J]. 计算机工程与应用, 2017, 53(23): 177–183.  
ZHU H, LU J Z. Two level denoising with weighted kernel norm and total variation [J]. Computer Engineering and Applications, 2017, 53(23): 177–183. (in Chinese)
- [17] SWELDENS W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1996, 3(2): 186–200.
- [18] VEERAMANI V, MOHAN L. A comparative study of various wavelet approaches used in image denoising [J]. Information Technology in Industry, 2021, 9(1): 1061–1078.
- [19] KHAN S, JAIN A, KHARE A. Image denoising based on adaptive wavelet thresholding by using various shrinkage methods under different noise condition [J]. International Journal of Computer Applications, 2012, 59(20): 13–17.
- [20] FOI A, BORACCHI G. Foveated self-similarity in nonlocal image filtering [C] // Proceedings of SPIE: the International Society for Optical Engineering, 2012.
- [21] CHEN F, ZHANG L, YU H M. External patch prior guided internal clustering for image denoising [C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), 2015: 603–611.
- [22] DONG W S, ZHANG L, SHI G M, et al. Nonlocally centralized sparse representation for image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(4): 1620–1630.
- [23] DELEDALLE C A, DENIS L, TUPIN F. Iterative weighted maximum likelihood denoising with probabilistic patch-based weights [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(12): 2661–2672.
- [24] PARRILLI S, PODERICO M, ANGELINO C V, et al. A nonlocal SAR image denoising algorithm based on LMMSE wavelet shrinkage [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2012, 50(2): 606–616.

(编辑: 梁慧, 杨琴)