

## Dirichlet 分布的导弹命中精度贝叶斯估计

刘昊邦<sup>1</sup>, 胡涛<sup>1\*</sup>, 陈童<sup>1</sup>, 梁俊鹏<sup>2</sup>, 李明贵<sup>1</sup>

(1. 海军工程大学 管理工程与装备经济系, 湖北 武汉 430033; 2. 陆军工程大学 石家庄校区, 河北 石家庄 050003)

**摘要:**基于弹着点空间分布对目标毁伤效能的差异化影响, 构建导弹命中目标不同重要区域的概率分布模型, 实现对传统命中精度概念的扩展。针对导弹实打试验过程复杂、费用高、次数少的实际, 采用贝叶斯方法融合多源信息, 基于区域划分—分布确定—先验融合—后验求解的思路进行导弹命中精度估计。选取 Dirichlet 分布作为命中精度参数的先验分布, 运用 D-S(Dempster-Shafer) 证据理论对先验信息进行融合处理, 基于马尔可夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo, MCMC) 方法对精度参数的后验分布进行求解。示例表明, 该方法能够细致描述导弹命中目标不同重要区域的概率, 并科学融合多源命中精度先验信息, 为导弹命中精度估计方法及测试方案优化提供理论借鉴。

**关键词:**导弹命中精度; 贝叶斯估计; Dirichlet 分布; Dempster-Shafer 证据理论; 马尔可夫链蒙特卡罗



论  
文  
拓  
展

中图分类号: E927 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2025)03-119-09

## Bayesian estimation of missile hit accuracy for Dirichlet distribution

LIU Haobang<sup>1</sup>, HU Tao<sup>1\*</sup>, CHEN Tong<sup>1</sup>, LIANG Junpeng<sup>2</sup>, LI Minggui<sup>1</sup>

(1. Department of Management Engineering and Equipment Economics, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China;

2. Shijiazhuang Campus, Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China)

**Abstract:** Based on the differential impact of the spatial distribution of impact points on target damage effectiveness, the probability distribution model of missile hitting different important areas of target was constructed to realize expansion of the traditional hit accuracy concept. Aimed at the reality of actual missile hitting targets with complex process, high cost and low frequency, Bayesian method was used to fuse multi-source information, and missile hit accuracy was estimated on the basis of the idea of region division, distribution determination, prior fusion and posterior solution. The Dirichlet distribution was selected as the prior distribution of hit accuracy parameters, the D-S(Dempster-Shafer) evidence theory was used to fuse the prior information and the posterior distribution of accuracy parameters was solved by MCMC(Markov chain Monte Carlo) method. Example results show that this method can describe the probability of missile hitting different important areas of the target in detail, and scientifically integrate multiple types of prior information about hit accuracy, which provides theoretical references for missile hit accuracy estimation methods and test schemes optimization.

**Keywords:** missile hit accuracy; Bayesian estimation; Dirichlet distribution; Dempster-Shafer evidence theory; Markov chain Monte Carlo

导弹命中精度是衡量导弹性能的重要指标。战场情况的复杂变化和 target 机动能力的增强对导弹的精度性能及其测量工作提出了更高的要求<sup>[1-2]</sup>。通过对导弹命中精度的研究, 有利于制定弹药目标分配方案。相比依据命中目标与否的精度测量方法来说, 实际上由于弹着点空间分布特性与目标毁伤效能的差异化影响, 以不同重要程度区域的命中概率作为新型精度表征参量, 可

显著提升导弹精度性能科学评估的效度, 为分析对集群目标的火力配置以及改进导弹命中精度提供帮助。基于关联机制构建毁伤敏感区命中概率量化指标, 不仅实现了精度评估从二元向多维的范式转换, 更为集群目标火力优化及制导算法迭代提供了动态评估框架。

当前, 导弹命中精度测量作为导弹研究工作的重要组成部分受到众多学者研究, 并在这一领域取

收稿日期: 2023-02-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71501183)

第一作者: 刘昊邦(1998—), 男, 河南鹤壁人, 博士研究生, E-mail: liuwuliu\_2020@tju.edu.cn

\*通信作者: 胡涛(1970—), 男, 湖北荆门人, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: hutao188@139.com

引用格式: 刘昊邦, 胡涛, 陈童, 等. Dirichlet 分布的导弹命中精度贝叶斯估计[J]. 国防科技大学学报, 2025, 47(3): 119-127.

Citation: LIU H B, HU T, CHEN T, et al. Bayesian estimation of missile hit accuracy for Dirichlet distribution[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2025, 47(3): 119-127.

得一些进展。于录等<sup>[3]</sup>通过统计导弹每次射击是否命中目标的结果,采用基于二项分布的序贯截尾检验方法对导弹命中精度进行估计。李康等<sup>[4]</sup>通过探索反巡航导弹对空中目标射击时弹着点的分布规律,提出了二维正态分布的命中精度模型。王树山等<sup>[5]</sup>通过探索集束箭弹对目标的命中规律,综合考虑影响导弹命中精度的各种因素,提出蒙特卡罗仿真方法并通过计算机对导弹命中试验进行模拟。夏长俊等<sup>[6]</sup>采用蒙特卡罗方法对假目标防空作战过程进行仿真,并对防空武器的命中概率进行计算。王建江等<sup>[7]</sup>通过蒙特卡罗方法分析了卫星侦察信息精度对导弹命中概率的影响。谢超等<sup>[8]</sup>采用基于蒙特卡罗的统计方法对超空泡鱼雷命中概率进行评估。武志东等<sup>[9]</sup>构建潜射鱼雷命中概率的解析计算通式,对鱼雷的命中精度进行估计。赵志刚等<sup>[10]</sup>从弹药的打击原理出发,分析影响命中概率的误差因素,进而给出一种坦克火力系统命中概率的数学计算方法。上述现有二项分布方法、射弹散布方法以及蒙特卡罗方法等研究主要以导弹是否命中目标来估计导弹精度,或者对小样本导弹命中试验数据不足问题考虑较少。实际上,对于命中目标的导弹,又会划分为命中关键区域、命中非关键区域。命中目标不同区域对目标的打击效果是不一样的<sup>[11]</sup>。因此以命中目标不同重要程度区域的概率作为导弹精度测量指标得到的结果更为合理。对于射击试验来说,每次射击的导弹会命中某一重要等级区域,当进行多次打击时,可认为导弹命中目标不同重要区域的结果服从多项分布。

对于导弹来说,受目标、成本和环境的限制,进行大量外场射击试验来估计导弹命中精度的成本巨大且难以实施,因此还需要考虑小样本导弹精度试验问题。对此,Li 等<sup>[12]</sup>以弹药打击点目标形成的不同毁伤结果服从多项分布现象为基础,采用贝叶斯推断方法解决小样本数据难题,对不同毁伤等级下的弹药消耗进行估计。Zhao 等<sup>[13]</sup>利用贝叶斯方法融合多源先验信息,对小样本数据下不同毁伤等级对应的弹药消耗进行探索。上述研究虽然利用了贝叶斯方法解决小样本难题,但并没有考虑命中精度测量特点,在导弹精度方面的贝叶斯方法研究仍比较缺乏。

综合上述分析,本文以导弹命中目标不同重要区域的结果服从多项分布为基础,依据贝叶斯共轭分布定理,选用 Dirichlet 分布作为命中精度参数的先验分布。运用 D-S(Dempster-Shafer)证

据理论融合先验信息。通过马尔可夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo)方法与 Gibbs 抽样法解决后验分布复杂积分计算的困难。依据贝叶斯结果能够对导弹命中精度有更为科学的认识。

## 1 导弹命中精度试验描述

导弹命中精度作为评估打击效果的核心参数,具体表现为命中目标各重要区域的概率分布。命中要害部位的概率越高,导弹的精度性能越突出。为量化评估该参数,需对目标区域实施重要程度分级,并建立相应的命中精度试验分布模型。

### 1.1 目标区域重要性等级分类

目标由许多区域构成,不同区域重要程度不同。对于重要区域来说,受到导弹打击时,会使目标严重受损且作战效能大幅度降低;而对于非重要区域来说,受到导弹打击时,对目标毁伤不大。因此,依据重要程度进行区域划分,共分为 4 个等级区域,如表 1 所示。

表 1 目标区域重要性等级分类

Tab. 1 Importance classification of target area

目标区域	区域情况
无影响区域	这类区域具有极高防护或者作战价值极低特性,导弹命中不造成有效毁伤效果
轻度影响区域	这类区域具有较高防护或者作战价值较低特性,导弹命中仅造成轻度毁伤效果
中度影响区域	这类区域具有中等防护或者作战价值适中特性,导弹命中将造成中度毁伤效果
重度影响区域	这类区域具有较低防护或者作战价值较高特性,导弹命中将造成重度毁伤效果

目标区域需要结合导弹打击目标的实际情况进行科学、合理的划分。若目标区域划分不够科学则降低了本研究方法的准确性和适用性。

### 1.2 多项分布导弹命中精度试验描述

现有的二项分布命中精度试验主要利用导弹是否命中目标的成败型数据。假设共进行  $n$  次打击试验,则命中导弹数  $q$  可用二项分布进行描述,导弹命中精度试验可表示为:

$$f(q | n, \theta) = C_n^q \theta^q (1 - \theta)^{n - q} \quad (1)$$

式中: $\theta$  为导弹命中概率; $C_n^q$  为组合数,表示从  $n$  次试验中选出  $q$  次命中成功的方式数目,其值为  $n! / [q!(n - q)!]$ 。

二项分布导弹命中精度试验适用于目标较小、导弹命中目标即可摧毁目标的情况,此时不需要对目标区域进行划分。

对于目标范围较大,导弹命中目标不同部位造成毁伤不同的情况,此时需要对目标区域进行划分。由1.1小节分析可知,目标区域划分为4个重要性等级,用 $S_i (i=1,2,3,4)$ 代表单次发射命中各等级区域的结果,记 $\theta_i = P\{S_i\}$ 代表导弹命中目标不同重要等级区域的概率,所有概率之和为1。记 $q_i$ 表示事件 $S_i$ 在 $n$ 次打击试验中发生的次数,则 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ 服从参数为 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ 的多项分布,多项分布导弹命中精度试验可表示为:

$$f(q_1, q_2, q_3, q_4 | n, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{n! \prod_{i=1}^4 \theta_i^{q_i}}{\prod_{i=1}^4 q_i!} \quad (2)$$

相比二项分布,多项分布更能准确描述导弹命中目标实际情况。

## 2 导弹命中精度参数先验分布确定

在导弹命中精度试验测量过程中,会存在比较充分的先验信息。有效整合既有先验信息,增加小样本导弹命中精度试验的信息量尤为必要。

### 2.1 导弹命中精度参数 $\boldsymbol{\theta}$ 贝叶斯估计

相比只利用样本信息的经典统计方法,贝叶斯方法能够综合利用导弹命中精度的样本信息、先验信息、总体信息进行参数估计<sup>[14-16]</sup>。因此,当针对外场射击试验样本数量不足的参数估计问题时,可以采用贝叶斯方法进行求解:

$$\pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{q}) = \frac{L(\mathbf{q} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta})}{m(\mathbf{q})} = \frac{L(\mathbf{q} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} L(\mathbf{q} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}} \quad (3)$$

式中: $L(\mathbf{q} | \boldsymbol{\theta})$ 为命中精度试验样本似然函数,包含外场射击试验信息; $\pi(\boldsymbol{\theta})$ 为命中精度参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验分布,包含参数先验信息;符号 $\Theta$ 为参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的积分区间,表示参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的所有可能取值范围; $m(\mathbf{q})$ 为现场样本的边缘分布,与参数 $\boldsymbol{\theta}$ 无关,则式(3)可化简为

$$\pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{q}) \propto L(\mathbf{q} | \boldsymbol{\theta}) \pi(\boldsymbol{\theta}) \quad (4)$$

由此可以看出,命中精度参数后验分布综合了样本信息与先验信息,先验信息能够对后验分布计算产生影响。因此,需要科学合理的先验信息来确定参数先验分布。

### 2.2 Dirichlet先验分布选择

贝叶斯先验分布构建方法包含共轭先验、最大熵以及无信息先验等类型<sup>[17-19]</sup>。本文基于计算可行性与先验信息可用性,采用共轭先验方法建立命中精度参数的概率分布模型。现有的二项分布导弹命中精度试验主要采用Beta分布作为导弹命中精度参数 $\theta$ 的先验分布:

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)} \quad (5)$$

根据贝叶斯共轭先验理论,选择Dirichlet分布作为多项分布的先验分布<sup>[20]</sup>,则命中精度参数 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ 的先验概率密度函数表达式为:

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^4 \alpha_i)}{\prod_{i=1}^4 \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^4 (\theta_i)^{\alpha_i-1} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为先验分布中的超参数, $\Gamma(\alpha_i)$ 为Gamma函数。

### 2.3 多源信息D-S证据理论融合

导弹在打击试验之前,通常会进行大量仿真试验或者科研试射试验,这些试验数据与外场条件下的射击试验数据通过一致性检验后,可以作为先验信息进行使用。通过对相似型号导弹射击试验数据进行处理,或者依据导弹设计专家的领域知识也可以获取一些先验信息。这些信息经过科学概率赋值处理之后可以认定其影响程度是相同的。本文收集的先验信息概率赋值如表2所示。

表2 先验信息概率赋值

Tab. 2 Prior information probability assignment

命中事件	专家知识 信息 $m_1$	仿真试验 信息 $m_2$
命中无影响区域	0.21	0.22
命中轻度影响区域	0.23	0.24
命中中度影响区域	0.31	0.28
命中重度影响区域	0.25	0.26

专家知识信息与仿真试验信息在导弹命中精度估计中存在差异。为进一步精确参数先验分布,引入D-S证据理论对先验信息进行融合处理<sup>[21-22]</sup>。组合规则如下:

$$m_{1\oplus 2}(S_i) = \begin{cases} \frac{\sum_{B \cap C = S_i} m_1(B)m_2(C)}{1-R} & S_i \neq \emptyset \\ 0 & S_i = \emptyset \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $R = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B)m_2(C)$ ;  $B$ 、 $C$  分别表征专家知识信息和仿真试验信息关于命中不同区域事件的集合, 为便于区分和计算采用不同符号表示。 $m_1(B)$ 、 $m_2(C)$  作为 mass 函数, 分别表征专家知识信息和仿真试验信息对命中不同区域事件概率的置信度评估, 且有:

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0 \\ \sum_{i=1}^4 m(S_i) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

专家知识信息和仿真试验信息可通过 D-S 证据理论进行融合, 融合过程如下所示:

$$\begin{aligned} m(S_i) &= m_1(B_i) \oplus m_2(C_i) \\ &= \frac{m_1(B_i)m_2(C_i)}{1-R} \\ &= \frac{m_1(B_i)m_2(C_i)}{\sum_{i=1}^4 m_1(B_i)m_2(C_i)} \end{aligned} \quad (9)$$

以命中轻度影响区域为例, 计算可得:

$$m(S_2) = \frac{m_1(B_2)m_2(C_2)}{\sum_{i=1}^4 m_1(B_2)m_2(C_2)} \quad (10)$$

将表 2 中数据代入得到  $m(S_2) = 0.218$ , 同理可以得到命中各区域概率的先验信息, 如表 3 所示。

表 3 D-S 证据理论信息融合精度参数赋值

Tab. 3 D-S evidence theory information fusion precision parameters assignment

命中事件	$m(S_i)$
命中无影响区域	0.182
命中轻度影响区域	0.218
命中中度影响区域	0.343
命中重度影响区域	0.257

通过信息融合可更全面把握导弹命中精度的先验信息特征。

### 3 导弹命中精度参数贝叶斯推断

#### 3.1 先验信息一致性检验

先验信息主要包括仿真试验信息和专家知识信息, 这些信息的科学性与可信性对导弹命中精

度贝叶斯估计结果有着重要影响。想要在贝叶斯推断中运用这些信息就必须让其与外场条件下射击试验信息进行一致性检验, 以证明先验信息的科学性。

假设  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  为  $n$  组仿真试验信息与专家知识信息获取到的数据,  $\mathbf{q}' = (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4)$  为外场射击试验数据。依据这些数据求出先验信息导弹命中精度试验分布函数:

$$F(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{q} \quad (11)$$

式中,  $\Omega$  为分布函数中参数  $\mathbf{q}$  的积分域。

针对外场试验样本量有限导致参数估计精度受限问题, 本研究选取外场射击试验数据  $\mathbf{q}' = (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4)$  实施分布拟合优度检验。应用经验分布函数型检验方法建立验证模型:

$$\begin{cases} H_0: F(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta}) = F(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta}) \\ H_1: F(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta}) \neq F(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta}) \end{cases} \quad (12)$$

$H_0$  为通过一致性检验,  $H_1$  为未通过一致性检验。

定义外场射击样本的经验分布:

$$F(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^i I_{[q'_i \leq q_i]} = \frac{\#\{ \sum_{i=1}^i q'_i \leq \sum_{i=1}^i q_i \}}{n} \quad (13)$$

式中,  $I_{[q'_i \leq q_i]}$  代表示性函数,  $\#\{ \cdot \}$  表示集合  $\{ \cdot \}$  中元素的个数。用  $\widehat{F}(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta})$  表示顺序统计量  $\mathbf{q}' = (q'_1, q'_2, q'_3, q'_4)$  的经验分布函数:

$$\widehat{F}(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} 0 & i < 1 \\ \sum_{i=1}^i \frac{q'_i}{n} & i = 1, \dots, 4 \\ 1 & i > 4 \end{cases} \quad (14)$$

引入 Kolmogorov 距离衡量  $F(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta})$  与  $F(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta})$  的一致性程度<sup>[23]</sup>:

$$K = \sup_{\mathbf{q}} |F(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta}) - F(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta})| \quad (15)$$

按照实际经验分布函数计算则有:

$$\widehat{K} = \max_{\mathbf{q}'} |\widehat{F}(\mathbf{q}' | n, \boldsymbol{\theta}) - F(\mathbf{q} | n, \boldsymbol{\theta})| \quad (16)$$

在给定显著性水平  $\alpha$  下, 检验一致性:

$$P(K \leq \widehat{K}) = 1 - \alpha \quad (17)$$

设定显著性水平  $\alpha = 0.5$  进行检验, 当  $\alpha$  超过阈值则接受  $H_0$ , 验证先验信息的统计可信性。

#### 3.2 导弹命中精度参数后验分布推导

由前一节推导可知选取 Dirichlet 分布作为导弹命中精度参数先验分布, 然后利用贝叶斯公式融合先验信息和外场条件下射击试验数据, 最终可以对参数后验分布进行求解。后验分布推导过程如下:

1)通过 D-S 证据理论对先验信息融合可以得到命中精度参数  $\theta$  先验分布  $\pi(\theta)$ 。

2)在外场条件下进行导弹射击试验,得到试验样本似然函数:

$$L(\mathbf{q}|\theta) = f(\mathbf{q}|n, \theta) = \frac{n! \prod_{i=1}^4 \theta_i^{q_i}}{\prod_{i=1}^4 q_i!} \quad (18)$$

3)构建导弹命中精度参数  $\theta$  贝叶斯公式:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\mathbf{q}) &= \frac{L(\mathbf{q}|\theta)\pi(\theta)}{\int L(\mathbf{q}|\theta)\pi(\theta)d\theta} \\ &= \frac{\frac{n! \prod_{i=1}^4 \theta_i^{q_i} \Gamma(\sum_{i=1}^4 \alpha_i)}{\prod_{i=1}^4 q_i! \prod_{i=1}^4 \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^4 (\theta_i)^{\alpha_i-1}}{\int \frac{n! \prod_{i=1}^4 \theta_i^{q_i} \Gamma(\sum_{i=1}^4 \alpha_i)}{\prod_{i=1}^4 q_i! \prod_{i=1}^4 \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^4 (\theta_i)^{\alpha_i-1} d\theta} \\ &= \frac{\frac{n!}{\prod_{i=1}^4 q_i!} \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^4 \alpha_i)}{\prod_{i=1}^4 \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^4 (\theta_i)^{\alpha_i+q_i-1}}{\int \frac{n!}{\prod_{i=1}^4 q_i!} \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^4 \alpha_i)}{\prod_{i=1}^4 \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^4 (\theta_i)^{\alpha_i+q_i-1} d\theta} \\ &= \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^4 \alpha_i + q_i)}{\prod_{i=1}^4 \Gamma(\alpha_i + q_i)} \prod_{i=1}^4 (\theta_i)^{\alpha_i+q_i-1} \quad (19) \end{aligned}$$

由此可以看出,贝叶斯方法求得命中精度参数  $\theta$  的后验分布也服从 Dirichlet 分布。

根据贝叶斯结果可以求出导弹命中精度参数  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$  的后验期望:

$$E(\theta_i|\mathbf{q}) = \int_0^1 \theta_i \pi(\theta|\mathbf{q}) d\theta_i \quad (20)$$

后验期望值综合了先验信息、总体信息、射击试验信息,利用信息更为全面。

### 4 基于 MCMC 方法模型求解

由于命中精度参数  $\theta$  维度较高,想要得到参数后验分布以及后验期望,就需要解决后验分布高维积分难题。对此采用 MCMC 方法通过参数抽样模拟来对后验分布进行求解<sup>[24-26]</sup>。其基本流程如下:

1)设定参数  $\theta$  初始状态,并基于原始样本选定  $\theta_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0)$  作为初始值。

2)通过马尔可夫链进行参数状态迭代更新,当样本均值  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \theta^{(i)}$  稳定时确认达到平稳状态。

3)通过持续状态更新生成样本序列  $(\theta^{(k+1)}, \theta^{(k+2)}, \dots, \theta^{(k+M)})$ 。

4)剔除马尔可夫链收敛状态之前的  $k$  个样本,基于新的有效样本计算参数  $\theta$  的后验期望:

$$E(\theta|\mathbf{q}) = \frac{1}{M-k} \sum_{i=k+1}^M \theta^{(i)} \quad (21)$$

针对高维参数  $\theta$  直接抽样的困难,需采用 Metropolis-Hastings 算法或者 Gibbs 抽样方法实施后验参数抽样。Metropolis-Hastings 算法对参数  $\theta$  的概率密度函数敏感;而基于条件概率的 Gibbs 抽样方法规避了该限制,在低相关性的仿真场景中表现出更优的收敛特性与计算效率。因此,选择 Gibbs 抽样方法进行求解。Gibbs 抽样方法将高维样本复杂难题转化为每次只抽取一个参数的一维抽样问题,从而便于抽样实现<sup>[27]</sup>。Gibbs 抽样实施流程如下:

1)构建后验一元条件分布,较多元分布更易采样。基于后验公式解析推导其数学表达式:

$$\begin{cases} \pi_1(\theta_1|\mathbf{q}, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \\ \pi_2(\theta_2|\mathbf{q}, \theta_1, \theta_3, \theta_4) \\ \pi_3(\theta_3|\mathbf{q}, \theta_1, \theta_2, \theta_4) \\ \pi_4(\theta_4|\mathbf{q}, \theta_1, \theta_2, \theta_3) \end{cases} \quad (22)$$

2)从原始子样当中选取  $\theta_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0)$  作为初始样本进行迭代抽样,若第  $k$  次迭代开始参数  $\theta$  的值为  $\theta^{(k-1)} = (\theta_1^{(k-1)}, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \theta_4^{(k-1)})$ ,则第  $k$  次迭代过程如下:

从后验一元条件分布  $\pi_1(\theta_1|\mathbf{q}, \theta_2^{(k-1)}, \theta_3^{(k-1)}, \theta_4^{(k-1)})$  中抽取  $\theta_1^{(k)}$ ;

从后验一元条件分布  $\pi_2(\theta_2|\mathbf{q}, \theta_1^{(k)}, \theta_3^{(k-1)}, \theta_4^{(k-1)})$  中抽取  $\theta_2^{(k)}$ ;

从后验一元条件分布  $\pi_3(\theta_3|\mathbf{q}, \theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_4^{(k-1)})$  中抽取  $\theta_3^{(k)}$ ;

从后验一元条件分布  $\pi_4(\theta_4|\mathbf{q}, \theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)})$  中抽取  $\theta_4^{(k)}$ 。

由此可以得到第  $k$  次迭代产生的新样本  $\theta^{(k)} = (\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \theta_3^{(k)}, \theta_4^{(k)})$ 。

3)取马尔可夫链平稳期样本的均值作为参数估计值:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \frac{\theta_1^{(k+1)} + \theta_1^{(k+2)} + \dots + \theta_1^{(M)}}{M - k} \\ \hat{\theta}_2 = \frac{\theta_2^{(k+1)} + \theta_2^{(k+2)} + \dots + \theta_2^{(M)}}{M - k} \\ \hat{\theta}_3 = \frac{\theta_3^{(k+1)} + \theta_3^{(k+2)} + \dots + \theta_3^{(M)}}{M - k} \\ \hat{\theta}_4 = \frac{\theta_4^{(k+1)} + \theta_4^{(k+2)} + \dots + \theta_4^{(M)}}{M - k} \end{cases} \quad (23)$$

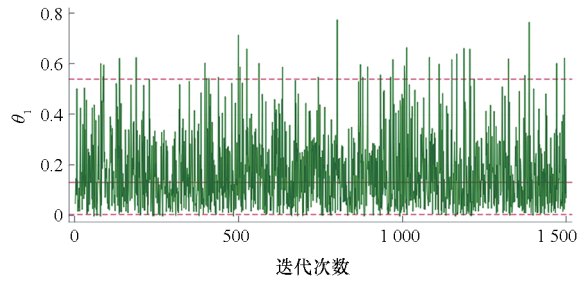
$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4)$  即为命中精度参数的贝叶斯估计值。

### 5 算例分析

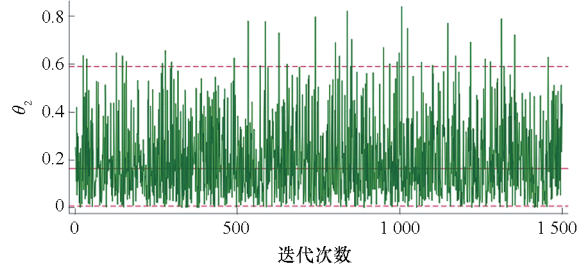
为了估计某型号导弹命中精度,在外场条件下进行实弹射击试验。考虑到导弹射击的目标较大,导弹命中目标不同区域造成的毁伤程度不同,因此需要对目标的不同区域进行划分。本研究将导弹打击目标的区域按重要性划分为 4 类,并且假设每次射击试验条件相同。单次射击的命中结果可唯一对应命中无影响、轻度影响、中度影响、重度影响的区域。受试验成本和试验环境的限制,在外场条件下只进行 20 枚导弹射击试验,其中命中无影响区域的导弹数为 3 枚,命中轻度影响区域的导弹数为 4 枚,命中中度影响区域的导弹数为 8 枚,命中重度影响区域的导弹数为 5 枚。外场条件下射击试验次数较少,采用经典统计方法估计命中精度会存在误差较大风险,使得导弹命中精度估计不够准确。为克服样本数量不足难题,按照前文所述的贝叶斯推断过程对导弹命中精度参数进行估计。

依据导弹命中精度参数先验分布以及外场条件下导弹射击试验数据,利用贝叶斯专用 WinBUGS 软件进行求解。采用 MCMC 方法并结合 Gibbs 抽样从条件概率分布中对命中精度参数  $\theta$  进行迭代抽样,生成马尔可夫链。设置迭代次数 1 500:前 200 次迭代为预迭代,以确保参数的收敛性;后 1 300 次迭代为正式迭代,作为贝叶斯估计样本。生成参数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  的迭代踪迹图,如图 1 所示。图 1 反映了导弹命中精度参数  $\theta_i$  每次迭代的贝叶斯抽样值,从图中可以看出迭代抽样的结果较为平稳,可以利用该迭代抽样结果分析参数贝叶斯分布。观察参数  $\theta_i$  的自相关系数,如图 2 所示。 $\theta_i$  的自相关系数在  $\pm 0.1$  区间波动,数值偏小,收敛性达标,其抽样值可准确表征参数分布特征。绘制参数  $\theta_i$  的核密度图,如图 3 所示。核密度图将参数  $\theta_i$  的贝叶斯迭代抽样结果以分布的形式进行表示,能够对导弹命中精

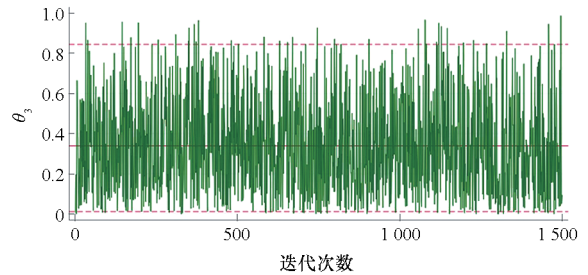
度参数  $\theta_i$  的贝叶斯分布有更为直观的认识。



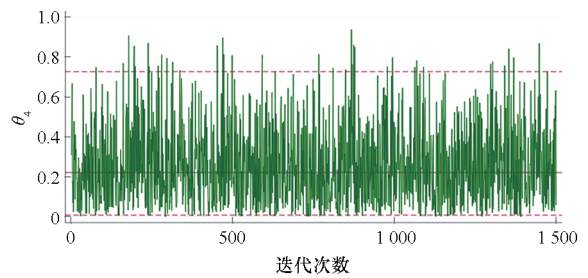
(a)  $\theta_1$



(b)  $\theta_2$



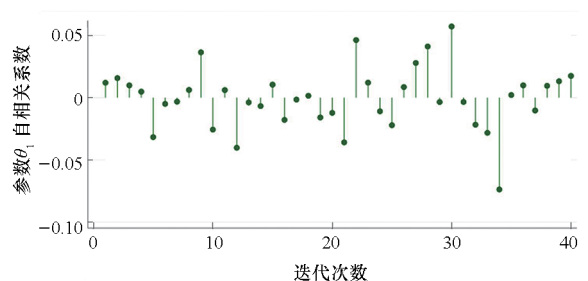
(c)  $\theta_3$



(d)  $\theta_4$

图 1 命中精度参数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  迭代踪迹图

Fig. 1 Hit accuracy parameters  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  iteration trace graph



(a)  $\theta_1$  自相关系数

(a)  $\theta_1$  autocorrelation coefficient



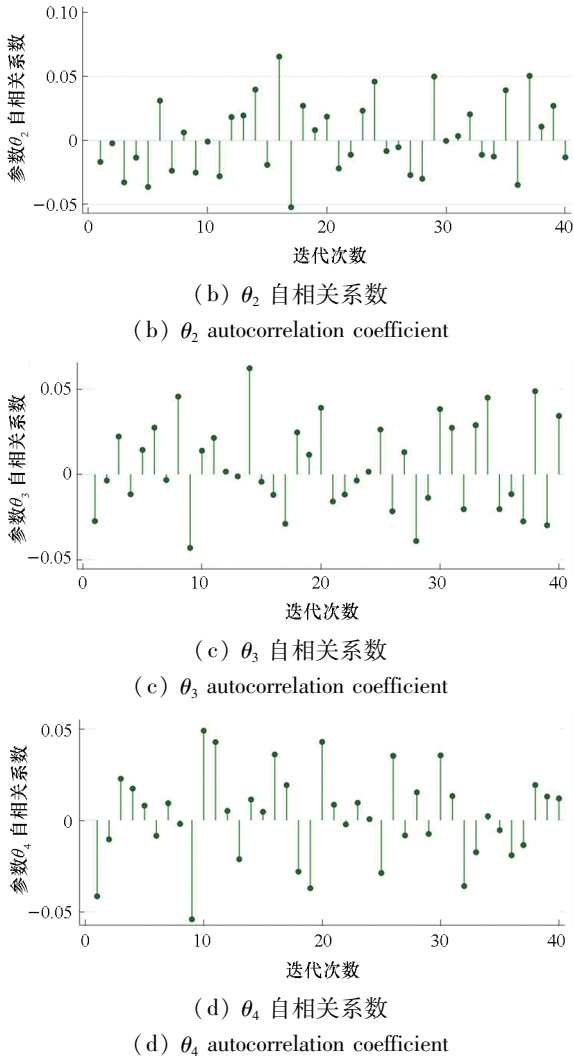


图2 命中精度参数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  自相关图  
Fig.2 Hit accuracy parameters  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  autocorrelations graph

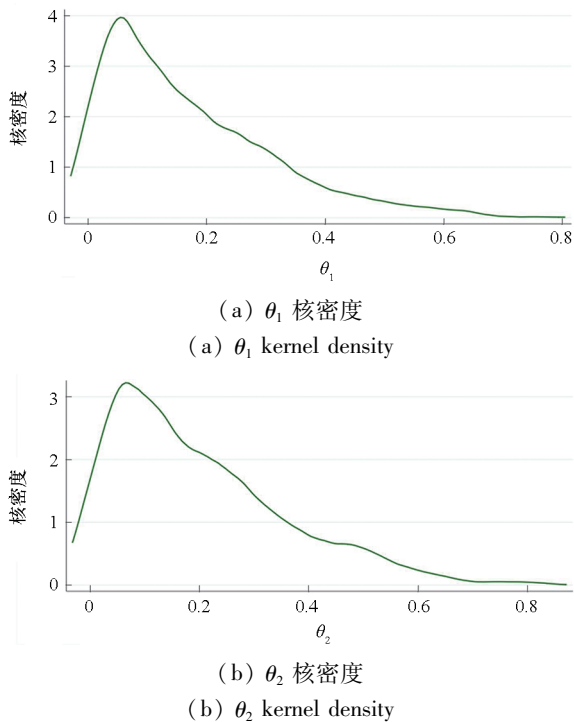


图3 命中精度参数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  核密度图  
Fig.3 Hit accuracy parameters  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  kernel density graph

对每条导弹命中精度参数  $\theta_i$  的马尔可夫链抽样结果进行统计分析,如表4所示。为突出本研究的创新性与有效性,同时采用现有的经典统计方法、Beta分布贝叶斯方法(二项分布试验,以命中中度及以上影响区域为标准)对导弹命中精度参数进行估计,并与本研究提出的Dirichlet分布贝叶斯方法进行对比,结果如表4所示。

依据表4结果可知,根据经典统计方法得到的导弹命中无影响区域的概率为0.15,命中轻度影响区域的概率为0.20,命中中度影响区域的概率为0.40,命中重度影响区域的概率为0.25。根据Beta分布贝叶斯方法得到的导弹命中目标的概率均值为0.620,方差为0.4235。根据本研究Dirichlet分布贝叶斯方法得到的导弹命中无影响、轻度影响、中度影响、重度影响区域概率的均值分别为0.169、0.211、0.367、0.253,方差分别为0.1543、0.1923、0.2821、0.2366。本研究Dirichlet分布贝叶斯方法将导弹命中精度参数  $\theta_i$  视为随机变量,且与经典统计方法所得结果略有不同,原因就是Dirichlet分布贝叶斯方法在经典统计方法的基础上融合了先验信息。

只利用实弹射击试验数据的经典统计方法得到的  $\theta_i$  为固定值,且不能对先验信息进行利用。Beta分布贝叶斯方法只能得到命中与否的成败

型数据结果,对导弹命中精度性能描述不够细致。本研究 Dirichlet 分布贝叶斯估计方法能够有效利

用先验信息且细致描述导弹命中精度性能,具有创新性和有效性。

表 4 命中精度参数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  统计分析

Tab. 4 Statistical analysis of hit accuracy parameters  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$

导弹命中精度参数	经典统计方法 统计值	Beta 分布贝叶斯方法			Dirichlet 分布贝叶斯方法		
		均值	方差	误差量	均值	方差	误差量
$\theta_1$	0.15	0.380	0.276 0	0.007 21	0.169	0.154 3	0.003 95
$\theta_2$	0.20	0.620	0.423 5	0.010 18	0.211	0.192 3	0.004 33
$\theta_3$	0.40				0.367	0.282 1	0.006 79
$\theta_4$	0.25				0.253	0.236 6	0.005 31

### 6 结论

本研究构建的导弹命中精度贝叶斯估计方法,通过引入 Dirichlet 分布作为先验分布,实现对命中结果的精细化分析。同时引入 D-S 证据理论对多源先验信息进行融合处理,并进行一致性检验,充分利用导弹命中精度先验信息。通过贝叶斯公式对导弹命中精度参数后验分布进行推导,采用 MCMC 方法克服后验分布高维积分难题,利用 Gibbs 抽样方法对参数进行抽样,依据抽样结果得到命中精度参数贝叶斯估计。相比依靠命中目标与否的现有研究,本研究对导弹命中精度的描述更为细致,融入导弹命中精度多源先验信息,得到更为精确的精度估计结果,可为小子样导弹命中精度试验提供借鉴。

### 参考文献 (References)

[1] HUANG J, WU P F, LI X B. Research on dynamically corrective hit probability model of anti-air missile integrated in war game system[J]. Engineering Letters, 2022, 30(2): 757-763.

[2] 张金槐. 小子样下命中概率的估计[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(6): 109-113.

ZHANG J H. Estimating of fitting probability under the circumstance of small sample [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2001, 23(6): 109-113. (in Chinese)

[3] 于录, 曲宝忠, 时维科. 反舰导弹单发命中概率检验方法[J]. 海军航空工程学院学报, 2012, 27(1): 23-26.

YU L, QU B Z, SHI W K. Method of test for hit probability of single shot of anti-ship missile [J]. Journal of Naval Aeronautical and Astronautical University, 2012, 27(1): 23-26. (in Chinese)

[4] 李康, 史宪铭, 李广宁, 等. 基于正态-逆伽马分布的反巡航导弹命中概率估计方法[J]. 系统工程与电子技术, 2022, 44(8): 2621-2627.

LI K, SHI X M, LI G N, et al. Estimation method of hit probability of anti-cruise missile weapon based on normal-inverse Gamma distribution [J]. Systems Engineering and

Electronics, 2022, 44(8): 2621-2627. (in Chinese)

[5] 王树山, 买瑞敏. 集束箭弹命中概率分析的 Monte-Carlo 方法[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 286-288.

WANG S S, MAI R M. Monte-Carlo analysis method on hit probability of multi-arrow canisters [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 286-288. (in Chinese)

[6] 夏长俊, 洪亮, 滕克难. 装备假目标防空作战仿真及效能分析[J]. 海军航空大学学报, 2022, 37(5): 423-428.

XIA C J, HONG L, TENG K N. Combat simulation and effectiveness evaluation of equipment decoys in aerial defence[J]. Journal of Naval Aviation University, 2022, 37(5): 423-428. (in Chinese)

[7] 王建江, 徐培德, 王慧林, 等. 导弹打击海上移动目标中的卫星侦察信息精度影响分析[J]. 国防科技大学学报, 2013, 35(1): 180-184.

WANG J J, XU P D, WANG H L, et al. Impact analysis of satellite reconnaissance information precision on missile hitting maritime floating target[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2013, 35(1): 180-184. (in Chinese)

[8] 谢超, 周景军, 万亚民, 等. 基于脱靶量散布的超空泡鱼雷命中概率研究[J]. 水下无人系统学报, 2022, 30(2): 237-244, 253.

XIE C, ZHOU J J, WAN Y M, et al. Research on hitting probability of supercavitating torpedo based on dispersion of miss distance[J]. Journal of Unmanned Undersea Systems, 2022, 30(2): 237-244, 253. (in Chinese)

[9] 武志东, 于雪泳, 许兆鹏. 潜射鱼雷命中概率的解析计算通式及应用[J]. 水下无人系统学报, 2021, 29(2): 203-209.

WU Z D, YU X Y, XU Z P. Analytic formula and employment of the hitting probability for sub-launched torpedo[J]. Journal of Unmanned Undersea Systems, 2021, 29(2): 203-209. (in Chinese)

[10] 赵志刚, 张海军, 于红娟, 等. 一种坦克火力单发命中概率的数学计算方法[J]. 火力与指挥控制, 2015, 40(1): 115-117.

ZHAO Z G, ZHANG H J, YU H J, et al. A mathematics calculation for tank fire single hit probability[J]. Fire Control & Command Control, 2015, 40(1): 115-117. (in Chinese)

[11] 周阳, 李向东, 周兰伟, 等. 弹药对典型钢筋混凝土楼房毁伤评估方法研究[J]. 弹药学报, 2020, 32(4): 46-53.



- ZHOU Y, LI X D, ZHOU L W, et al. Research on assessment method of ammunition damaging typical reinforced concrete building[J]. *Journal of Ballistics*, 2020, 32(4): 46–53. (in Chinese)
- [12] LI K, SHI X M, LI J, et al. Bayesian estimation of ammunition demand based on multinomial distribution[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2021, 1: 5575335.
- [13] ZHAO R D, SHI X M, WANG Q, et al. Bayesian inference for ammunition demand based on Gompertz distribution[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2020, 31(3): 567–577.
- [14] MCNEISH D. On using Bayesian methods to address small sample problems [J]. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 2016, 23(5): 750–773.
- [15] HAWKINS J, HABIB K N. Bayesian estimation of discrete choice models: a comparative analysis using effective sample size[J]. *Transportation Letters*, 2022, 14(10): 1091–1099.
- [16] AL-LABADI L, BERRY S. Bayesian estimation of entropy and goodness of fit tests[J]. *Journal of Applied Statistics*, 2022, 49(2): 357–370.
- [17] VILA J P, WAGNER V, NEVEU P. Bayesian nonlinear model selection and neural networks: a conjugate prior approach[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2000, 11(2): 265–278.
- [18] XIAO N C, LI Y F, WANG Z L, et al. Bayesian reliability estimation for deteriorating systems with limited samples using the maximum entropy approach [J]. *Entropy*, 2013, 15(12): 5492–5509.
- [19] CHENG Y B, CHEN X H, LI H L, et al. Analysis and comparison of Bayesian methods for measurement uncertainty evaluation[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 1: 7509046.
- [20] ELFADALY F G, GARTHWAITE P H. Eliciting Dirichlet and Connor-Mosimann prior distributions for multinomial models[J]. *Test*, 2013, 22: 628–646.
- [21] TANG Y C, ZHENG J C. Generalized Jeffrey's rule of conditioning and evidence combining rule for a priori probabilistic knowledge in conditional evidence theory[J]. *Information Sciences*, 2006, 176(11): 1590–1606.
- [22] WANG N K, WEI D J. An adaptive Dempster-Shafer theory of evidence based trust model in multiagent systems [J]. *Applied Sciences*, 2022, 12(15): 7633.
- [23] 胡宏昌, 王佳琪. 近似 P-范分布的渐近正态性及柯尔莫哥洛夫检验[J]. *湖北师范大学学报(自然科学版)*, 2021, 41(4): 1–6.
- HU H C, WANG J Q. Asymptotic normality of approximate P-norm distributions and Kolmogorov testing [J]. *Journal of Hubei Normal University (Natural Science)*, 2021, 41(4): 1–6. (in Chinese)
- [24] 朱丰毅, 黎中彦, 韩兆洲. 贝叶斯分层空间杜宾模型的 MCMC 估计方法及实证分析[J]. *数理统计与管理*, 2022, 41(5): 803–814.
- ZHU F Y, LI Z Y, HAN Z Z. MCMC estimation method of Bayesian hierarchical spatial Durbin model and empirical analysis[J]. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2022, 41(5): 803–814. (in Chinese)
- [25] BORKAR V S. Markov chain Monte Carlo (MCMC) [J]. *Resonance*, 2022, 27(7): 1107–1115.
- [26] HAFYCH V, ELLER P, SCHULZ O, et al. Parallelizing MCMC sampling via space partitioning [J]. *Statistics and Computing*, 2022, 32: 56.
- [27] HAN Q, NI P H, DU X L, et al. Computationally efficient Bayesian inference for probabilistic model updating with polynomial chaos and Gibbs sampling[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2022, 29(6): e2936.