

热环境中黏弹性基体上 FG-CNTRC Kirchhoff 板的自由振动特性分析

吴 栋^{1,2}, 张大鹏^{1,2}, 于宝石^{1,2}, 雷勇军^{1,2,3*}

(1. 国防科技大学 空天科学学院, 湖南 长沙 410073; 2. 天地往返高效运输技术全国重点实验室, 湖南 长沙 410073;
3. 火箭军工程大学, 陕西 西安 710025)

摘要: FG-CNTRC 凭借其卓越力学性能和可设计特性, 在先进装备制造中展现出重要工程价值。围绕纳米增强相尺度效应对其增强结构力学响应影响机制的关键问题, 结合非局部理论与 Eshelby-Mori-Tanaka 方法, 构建了纳观-宏观跨尺度本构模型。基于碳纳米管(carbon nanotubes, CNTs)空间梯度分布的数学表征, 考虑环境温度与 visco-Pasternak 基体的热-力耦合效应, 通过 Kirchhoff 板理论和能量变分原理构建了纳米增强复合结构振动控制方程, 求解了四边简支板的特征频率。分析了 CNTs 特征参数及热-力耦合效应对结构固有频率的作用机制。研究表明, 本构模型能有效表征 CNTs 尺度效应对结构动刚度的弱化作用。该效应同时抑制基体弹性参数对刚度的增益效果, 但显著提升温度变化的敏感性。同时, 结构往复振动的临界体积分数与基体阻尼参数呈正相关。

关键词: 非局部理论; Eshelby-Mori-Tanaka 细观方法; 碳纳米管增强复合材料; 功能梯度板; visco-Pasternak 基体

中图分类号: O343.6 文献标志码: A 文章编号: 1001-2486(2025)03-194-09

论
文
拓
展

Free vibration characteristics analysis of FG-CNTRC Kirchhoff plates on viscoelastic substrates in thermal environment

WU Dong^{1,2}, ZHANG Dapeng^{1,2}, YU Baoshi^{1,2}, LEI Yongjun^{1,2,3*}

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. State Key Laboratory of High-Efficiency Reusable Aerospace Transportation Technology, Changsha 410073, China;
3. Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025)

Abstract: FG-CNTRC demonstrate significant engineering value in advanced equipment manufacturing due to their exceptional mechanical properties and designable characteristics. The critical problem of nano-reinforcement scale effects on mechanical response mechanisms was addressed through integration of nonlocal theory with the Eshelby-Mori-Tanaka method, resulting in the development of a nano-to-macro multiscale constitutive model. Based on mathematical characterization of spatially gradient-distributed CNTs (carbon nanotubes), the thermo-mechanical coupling effects from environmental temperature and visco-Pasternak substrates were incorporated. Vibration governing equations for nanocomposite structures were established through Kirchhoff plate theory and energy variational principles, with characteristic frequencies of simply-supported plates subsequently solved. The influence mechanisms of CNTs' characteristic parameters and thermo-mechanical coupling effects on the natural frequency of structural systems was analyzed. Results demonstrate that the constitutive model effectively characterizes the stiffness-weakening effect induced by CNTs' scale effects. This effect simultaneously suppresses the stiffness enhancement from substrate elastic parameters while significantly increasing sensitivity to temperature variations. Moreover, the critical volume fraction for structural reciprocating vibration shows positive correlation with substrate damping parameters.

Keywords: nonlocal theory; Eshelby-Mori-Tanaka micromechanics method; carbon nanotubes reinforced composites; functionally graded plate; visco-Pasternak substrate

收稿日期: 2023-02-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11872372); 国防科技大学科研计划资助项目(ZK20-27); 国防科技大学自主创新科学基金资助项目(22-ZZCX-077)

第一作者: 吴栋(1997—), 男, 安徽阜阳人, 博士研究生, E-mail: wudong15@nudt.edu.cn

*通信作者: 雷勇军(1968—), 男, 湖南常德人, 教授, 博士, 博士生导师, E-mail: leiyj108@nudt.edu.cn

引用格式: 吴栋, 张大鹏, 于宝石, 等. 热环境中黏弹性基体上 FG-CNTRC Kirchhoff 板的自由振动特性分析[J]. 国防科技大学学报, 2025, 47(3): 194-202.

Citation: WU D, ZHANG D P, YU B S, et al. Free vibration characteristics analysis of FG-CNTRC Kirchhoff plates on viscoelastic substrates in thermal environment[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2025, 47(3): 194-202.

功能梯度材料是指增强相沿材料厚度方向连续梯度变化的一类复合材料^[1],最早由学者于1984年在研究航天飞机耐热材料时提出^[2-3]。与传统复合材料相比,功能梯度材料通过梯度界面代替尖锐界面,实现了不同材料间的平滑过渡,显著提升了抗分层、脱粘能力^[4]和可设计性,在航空航天等高端工业领域展示出广阔的应用前景。碳纳米管(carbon nanotubes, CNTs)以其优异的力学性能成为功能梯度材料的理想增强相^[5-6],功能梯度碳纳米管增强复合材料(functionally graded carbon nanotubes reinforced composites, FG-CNTRC)已成为先进复合材料领域研究的热点^[7]。由于飞行器在复杂热环境下服役,环境载荷会显著影响其结构动力学响应,针对FG-CNTRC薄板的热机械振动问题研究成为推动该类复合材料在航空航天领域应用的重要课题。

CNTRC力学响应分析手段中,实验和分子动力学模拟具有较高的精度,但前者的显著缺点是周期长、成本高,而分子动力学模拟在宏观结构分析中面临计算效率瓶颈^[8]。相比之下,理论建模则展现出快速高效、经济实用等突出优势,其预测结果能有效指导实验设计与分子动力学模拟,体现出独特的方法学价值。获取等效力学性能对纳米增强复合材料力学响应分析至关重要。当前应用较广的理论中,混合方法模型简单,但无法考虑纳米纤维的固有特性,如波纹、团聚和尺度效应^[9]。EMT(Eshelby-Mori-Tanaka)理论框架能考虑纳米纤维的固有特性,且适用范围广^[8,10]。Adhikari和Singh^[11]基于EMT方法和代表性体积有限元方法研究了FG-CNTRC板的几何非线性动力学响应。Taheri等^[12]基于EMT方法获取了CNTRC的等效力学性能,并通过扩展有限元法分析了剪切载荷下含裂纹CNTRC板的屈曲特性。Pak等^[13]将有限元建模计算的界面热阻应用到EMT方法中,成功预测了具有完美和不完美界面的CNTRC的热导率,并通过有限元仿真和实验验证了该方法的有效性。

研究表明,纳米材料存在显著的尺度效应^[14],导致其在纳米量级呈现与宏观体系显著差异的力学响应。复合材料中采用纳米增强相时,尺度效应的影响同样不可忽略^[15]。鉴于连续介质理论未纳入尺度效应的影响机制,其对于纳米结构力学响应的表征能力受到根本性限制。针对这一理论局限性,学界发展出跨尺度理论分析框架(包括非局部效应、应变梯度修正项及表面能量耦合机制等模块),成功拓展了连续介质理论

在纳米力学领域的适域。分析表明,非局部理论在参数匹配度方面与分子动力学模拟高度一致^[16],因此在纳米结构动力学特性表征中展现突出适用性。Marandi等^[17]基于Timoshenko梁模型和Hamilton原理研究了纳米尺度CNTRC夹层梁的自由振动特性。Ghorbanpour等^[18]整合EMT方法和改进型混合方法,构建了纳米增强材料的刚度张量与其增强相特征参数的关联模型,运用非局部理论揭示了表面应力对CNTRC纳米板双轴临界屈曲承载力的调控机理。此外,系统的力学响应受到外部环境和结构组成的显著影响。Amir等^[19]研究了非线性电磁环境下Pasternak基体连接的两个CNTs增强聚偏氟乙烯微米板的自由振动响应。Daghigh等^[20]探讨了热环境中Pasternak基体上纳米CNTRC板力学响应随CNTs团聚、体积分数的变化机制。研究团队在前期工作中,通过发展非局部EMT理论框架,成功揭示了尺度效应对典型结构体系(含Timoshenko梁^[21]与功能梯度圆筒壳^[22])静力学与动力学响应的跨尺度作用机制。

综上所述,国内外学者在纳米尺度下CNTRC结构力学行为研究方面取得了丰硕成果,但关于CNTs尺度效应对宏观CNTRC结构力学响应影响的研究相对缺乏。为此,构建热-力耦合作用下纳米增强复合材料结构的理论框架,通过引入非局部理论框架表征纳米增强相尺度效应的跨尺度影响机制,结合EMT方法构建本构模型,实现宏观纳米增强复合材料刚度的等效表征。基于Kirchhoff板理论和黏弹性基体模型,以及CNTs的空间梯度分布构型,运用Hamilton变分原理推导构建振动控制方程,建立简支CNTRC板固有振动模态的数值解法,分析揭示纳米增强相的尺度效应及其分布特征、热-力耦合环境对CNTRC板固有频率的跨尺度作用机制。

1 理论建模

1.1 CNTRC的力学特性

假设CNTRC中分布着一定量的直CNTs,且其轴线方向随机分布,单个CNT的取向由欧拉角 α_E 和 β 表征。CNTRC中所有CNTs的取向由概率密度函数 $p(\alpha_E, \beta)$ 描述,且满足式(1)^[23]。

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} p(\alpha_E, \beta) \sin\alpha_E d\alpha_E d\beta = 1 \quad (1)$$

其中,当CNTs随机取向时 $p(\alpha_E, \beta) = (2\pi)^{-1}$ 。

根据 EMT 方法和非局部理论, CNTs 的平均应变 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r$ 、平均应力 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_r$ 与基体的平均应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 和平均应力 $\boldsymbol{\sigma}_m$ 之间的关系可表示为

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r = \bar{\mathbf{A}}_{EMT} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ [1 - (e_0 a)^2 \Delta] \bar{\boldsymbol{\sigma}}_r = \bar{\mathbf{C}}_r \bar{\mathbf{A}}_{EMT} \mathbf{C}_m^{-1} \boldsymbol{\sigma}_m \end{cases} \quad (2)$$

其中, $e_0 a$ 为 CNTs 的非局部特征参数; Δ 为 Laplace 算子; \mathbf{C}_m 为基体的刚度矩阵, \mathbf{C}_r 为 CNTs 的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{A}}_{EMT}$ 为 EMT 方法引入的矩阵。若 CNTs 沿相同方向排列, 则有

$$\mathbf{A}_{EMT} = [\mathbf{I}_{um} + \mathbf{S} \mathbf{C}_m^{-1} (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_m)]^{-1} \quad (3)$$

式中: \mathbf{I}_{um} 为单位矩阵; \mathbf{S} 为 Eshelby 矩阵, 具体表达式可参考文献[23]。

对于随机取向的 CNTs, $\bar{\mathbf{A}}_{EMT}$ 可视为 \mathbf{A}_{EMT} 在空间上的平均, 即

$$\bar{\mathbf{A}}_{EMT} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\alpha_E, \beta_E) \mathbf{A}_{EMT}(\alpha_E, \beta_E) \sin \alpha_E d\alpha_E d\beta_E \quad (4)$$

假设基体与 CNTs 之间的黏接界面可忽略, 即二者之间具有完美的载荷传递, 则有^[24]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = f_m \boldsymbol{\sigma}_m + f_r \bar{\boldsymbol{\sigma}}_r \\ \boldsymbol{\varepsilon} = f_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + f_r \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r \end{cases} \quad (5)$$

其中: f_m 和 f_r 分别为基体和 CNTs 的体积分数, 且 $f_m + f_r = 1$; $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 CNTRC 的平均应力和平均应变。

将式(2)代入式(5), 可求得 CNTRC 平均应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和平均应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 之间的关系(如下式所示), 进而获得宏观 CNTRC 的等效力学性能。

$$[1 - (e_0 a)^2 \Delta] \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - (e_0 a)^2 \mathbf{C}_n \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{C} = (f_m \mathbf{C}_m + f_r \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{A}}_{EMT}) (f_m \mathbf{I}_{um} + f_r \bar{\mathbf{A}}_{EMT})^{-1} \quad (7)$$

需要指出的是, 所构建的本构模型框架可拓展至多类型纳米增强复合材料体系的跨尺度力学建模, 为先进纳米复合材料的优化设计提供普适性理论工具。

1.2 自由振动控制方程

图 1 所示为所建立的黏弹性基体上 FG-CNTRC 板的示意图。在直角坐标系 $o-xyz$ 中, 原点位于板的一角, $o-xy$ 平面与中面重合, x 轴和 y 轴分别沿长度和宽度方向延伸, z 轴与 x 轴和 y 轴形成右手系。板的几何尺寸由长度 L 、宽度 b 和厚度 h 表示。visco-Pasternak 基体的 k_w, k_c, c_i 分别表示其弹性层刚度、剪切层刚度和阻尼参数。

目前, 在功能梯度复合材料相关的理论建模中, 通常假设增强体沿 z 轴方向的分布方式为

$$f_r(z) = \begin{cases} f_r^* & \text{UD} \\ \left(1 + \frac{2z}{h}\right) f_r^* & \text{FG-V} \\ 2 \times \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) f_r^* & \text{FG-O} \\ \frac{4|z|}{h} f_r^* & \text{FG-X} \end{cases} \quad (8)$$

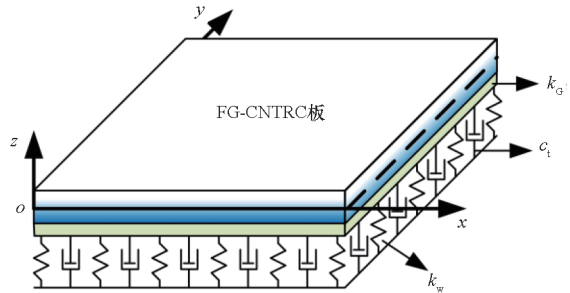


图 1 visco-Pasternak 基体上 FG-CNTRC 板示意图
Fig. 1 Schematic of the FG-CNTRC plate on a visco-Pasternak substrate

显然, 在四种分布方式下, CNTs 的质量分数均相等。

基于 Kirchhoff 板理论, CNTRC 板的位移场可表示为

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w_0(x, y, t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, u, v, w 表征材料点沿正交笛卡儿坐标系 x, y, z 轴向的位移响应, u_0, v_0, w_0 描述板中面参考点在相同坐标系下的基础运动学量。

根据式(9), CNTRC 板的应变场可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^0 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^1 \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

将式(10)代入式(6), 并考虑环境温度变化的影响, 可得

$$\begin{cases} [1 - (e_0 a)^2 \Delta] \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_T - (e_0 a)^2 \mathbf{C}_n \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} - \alpha_{11}(z)(T - T_r) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} - \alpha_{22}(z)(T - T_r) \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

其中: $T - T_r$ 为相对于参考环境温度 T_r 的温差,取 $T_r = 300 \text{ K}$; 横观各向同性热膨胀系数 $\alpha_{ii} (i = 1, 2)$ 表征 CNTRC 板在材料主方向 (x, y) 的热-力耦合响应特性,其表达式满足文献 [25] 提出的模型

$$\begin{cases} \alpha_{11} = f_r \alpha_{11}^{\text{CNT}} + f_m \alpha_m \\ \alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{\text{CNT}}) f_r \alpha_{22}^{\text{CNT}} + (1 + \nu_m) f_m \alpha_m - \nu_{12} \alpha_{11} \\ \nu_{12} = f_r \nu_{12}^{\text{CNT}} + f_m \nu_m \end{cases} \quad (12)$$

基于 Hamilton 能量变分原理,可得结构固有模态控制方程的定义式为 [26]

$$\int_0^T (\delta U + \delta W - \delta K) dt = 0 \quad (13)$$

其中, δU 、 δW 和 δK 分别表示虚应变能、虚功和虚动能。

虚应变能 δU 的表达式为

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dV \\ &= \int_{\Theta} (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0) d\Theta + \\ &\quad \int_{\Theta} (M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^1 + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1) d\Theta \end{aligned} \quad (14)$$

其中, Θ 为 CNTRC 板的 $o-xy$ 面区域;且满足

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \\ \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \end{cases} \quad (15)$$

虚动能 δK 可表示为

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta \dot{u} + \frac{\partial v}{\partial t} \delta \dot{v} + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \dot{w} \right) dV \\ &= \int_{\Theta} \left[I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta \dot{v}_0 + \frac{\partial w_0}{\partial t} \delta \dot{w}_0 \right) + \right. \\ &\quad \left. I_2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right] d\Theta \end{aligned} \quad (16)$$

其中, ρ 为 CNTRC 板的密度,有 $\rho = f_r \rho_r + f_m \rho_m$; 同时满足以下条件

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i dz \quad i = 0, 2 \quad (17)$$

虚功 δW [27] 可表示为

$$\delta W = \int_{\Theta} \left(N_Q \delta w_0 + N_{Tx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + N_{Ty} \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) d\Theta \quad (18)$$

式中, N_Q 表征黏弹性基体对 CNTRC 板的接触反力, N_{Tx} 、 N_{Ty} 为温度场作用形成的热载荷分量沿材料主方向 x 、 y 轴的分布,且满足以下关系 [28]

$$N_Q = k_w w_0 - k_C \Delta w_0 + c_t \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} N_{Tx} \\ N_{Ty} \end{bmatrix} = - \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} c_{11}(z) \alpha_{11}(z) \\ c_{22}(z) \alpha_{22}(z) \end{bmatrix} (T - T_r) dz \quad (20)$$

其中, $c_{11}(z)$ 和 $c_{22}(z)$ 为式(7)中刚度矩阵 C 的分量,下标表示对应于刚度矩阵的元素位置。将式(14)、式(16)和式(18)代入式(13),可推导出自由振动控制方程如下

$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0 \\ N_{yy,y} + N_{xy,x} - I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} = 0 \\ M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} + \\ N_{Tx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + N_{Ty} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + N_Q \\ = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{cases} \quad (21)$$

基于式(13),可同时获得 CNTRC 板的边界条件。针对四边简支 CNTRC 板的自由振动问题,其边界条件设置为

$$\begin{cases} u(x, 0) = u(x, b) = v(0, y) = v(L, y) = 0 \\ w(x, 0) = w(x, b) = w(0, y) = w(L, y) = 0 \\ M_{xx}(0, y) = M_{xx}(L, y) = 0 \\ M_{yy}(x, 0) = M_{yy}(x, b) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

假设 CNTRC 板的初始速度和初始位移均为零,即

$$\begin{cases} \dot{u}_0(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z, 0) = 0 \\ \dot{v}_0(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z, 0) = 0 \\ \dot{w}_0(x, y, z, 0) = w_0(x, y, z, 0) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式(21)~(23)严格确立了 FG-CNTRC 板固有模态问题的封闭解存在性条件。

2 四边简支 FG-CNTRC 板自由振动特性求解

为简化问题求解,引入以下无量纲参数 $\bar{x} =$

$$\begin{aligned} \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{u}_0 = \frac{u_0}{L}, \bar{v}_0 = \frac{v_0}{b}, \bar{w}_0 = \frac{w_0}{h}, \alpha = \frac{e_0 a}{L}; \eta = \\ \frac{h}{L}, \xi = \frac{h}{b}, \lambda = \frac{L}{b}, \bar{I}_0 = \frac{I_0}{\rho_m h}, \bar{I}_2 = \frac{I_2}{\rho_m h^3}, \bar{k}_w = \frac{k_w h}{E_m}, \\ \bar{k}_C = \frac{k_C}{E_m L}; \bar{c}_t = \frac{c_t h}{L \sqrt{E_m \rho_m}}, \tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}. \bar{N}_{Tx} = \frac{N_{Tx}}{E_m h}, \\ \bar{N}_{Ty} = \frac{N_{Ty}}{E_m h}, \bar{A}_{ij} = \frac{A_{ij}}{E_m h}, \bar{B}_{ij} = \frac{B_{ij}}{E_m h^2}; \bar{D}_{ij} = \frac{D_{ij}}{E_m h^3}, \bar{A}_{nj} = \end{aligned}$$

$$\frac{A_{nij}}{E_m h}, \bar{B}_{nij} = \frac{B_{nij}}{E_m h^2}, \bar{D}_{nij} = \frac{D_{nij}}{E_m h^3}.$$

基于 Navier 法求解 CNTRC 板的自由振动特性,其位移场可表示为^[29]

$$\begin{cases} \bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\Omega_{mn}\tau} \cos(\zeta\bar{x}) \sin(\beta\bar{y}) \\ \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\Omega_{mn}\tau} \sin(\zeta\bar{x}) \cos(\beta\bar{y}) \\ \bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} e^{i\Omega_{mn}\tau} \sin(\zeta\bar{x}) \sin(\beta\bar{y}) \end{cases} \quad (24)$$

其中: m 和 n 是半波数; U_{mn} 、 V_{mn} 和 W_{mn} 为 Fourier 系数; $\zeta = m\pi, \beta = n\pi, i = \sqrt{-1}; \Omega_{mn}$ 为 FG-CNTRC 板的无量纲复特征频率,与有量纲特征频率 ω_{mn} 之间的转换关系为

$$\Omega_{mn} = \omega_{mn} L \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \quad (25)$$

基于式(21)、式(24)~(29),可将振动控制方程改写为无量纲形式,具体如下

$$(\mathbf{K}_{3 \times 3} - \Omega_{mn}^2 \mathbf{M}_{3 \times 3} + i\Omega_{mn} \mathbf{C}_{1,3 \times 3}) \bar{\Xi}_{3 \times 1} = \mathbf{0} \quad (26)$$

其中

$$\bar{\Xi}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} \quad (27)$$

由于 $\mathbf{K}_{3 \times 3}$ 、 $\mathbf{M}_{3 \times 3}$ 和 $\mathbf{C}_{1,3 \times 3}$ 中元素的具体表达式较为冗长,为保持内容的简洁性,此处不再详细列出,相应的表达式可通过 Maple 软件进行推导。

对于式(31),CNTRC 板的位移 $\bar{\Xi}_{3 \times 1}$ 存在非零解的充要条件为系数矩阵的行列式为零,即

$$\det(\mathbf{K}_{3 \times 3} - \Omega_{mn}^2 \mathbf{M}_{3 \times 3} + i\Omega_{mn} \mathbf{C}_{1,3 \times 3}) = 0 \quad (28)$$

式(33)中绝对值最小的一组解对应于 CNTRC 板自由振动的无量纲固有频率。求得式(33)的显式解析表达式较为困难,为此基于 Newton 迭代算法进行半解析求解。

He 等^[30] 和 Zhao 等^[31] 分别采用有限元法 (finite element method, FEM) 和无网格 kp -Ritz 方法 (element free kp -Ritz method, EFRM) 对功能梯度材料 (functionally graded materials, FGM) 板的自由振动特性进行了分析,二者均假设增强相体积分数的分布方式为

$$f_r(z) = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^N \quad N \geq 0 \quad (29)$$

文献[30-31]中给出了式(29)在 $N=0$ 和 $N=2000$ 时简支 FGM Kirchhoff 板的固有频率。图 2 展示了 FGM Kirchhoff 板的固有频率与 FEM^[30] 和 EFRM^[31] 的对比结果,结果表明,FGM Kirchhoff 板固有频率的计算结果与文献[30-31]具有良好的 consistency。

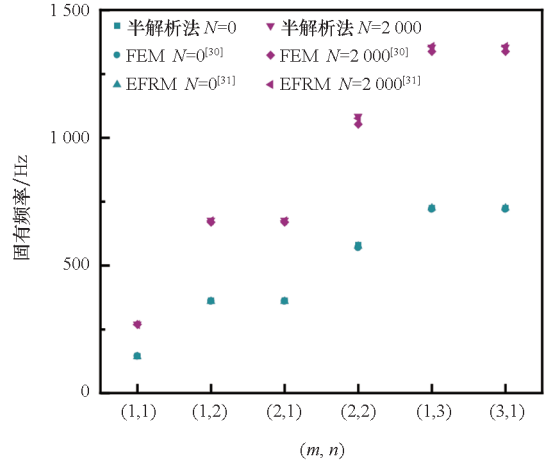


图 2 简支 FGM Kirchhoff 板的固有频率对比结果 ($L=b=0.4, h=0.005$)

Fig. 2 Comparison of natural frequencies for the simply-supported FGM Kirchhoff plate ($L=b=0.4, h=0.005$)

进一步,将四边简支 Pasternak 基体上 FGM 板无量纲基频的计算结果与文献[32]中的解析结果进行对比,如表 1 所示,结果表明二者具有良好的 consistency。其中,FGM 的性能参数沿板厚度方向变化的表达式为

$$P(z) = P_m + (P_r - P_m) \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^N \quad (30)$$

式中, P 表示 FGM 的弹性模量和密度。

表 1 Pasternak 基体上简支 FGM Kirchhoff 板的无量纲基频对比结果 ($L=b, \bar{k}_w = \bar{k}_c = 100$)

Tab. 1 Comparison of dimensionless fundamental frequencies (DFF) for the simply-supported FGM Kirchhoff plate on a Pasternak substrate ($L=b, \bar{k}_w = \bar{k}_c = 100$)

L/h	$N=0.5$		$N=1$		$N=2$	
	半解 析法	解析 法 ^[32]	半解 析法	解析 法 ^[32]	半解 析法	解析 法 ^[32]
10	0.158 8	0.156 3	0.155 5	0.154 2	0.152 7	0.153 5
20	0.039 8	0.039 5	0.038 9	0.038 8	0.038 2	0.038 6

3 参数影响分析

本节分析 CNTs 体积分数及其分布类型、尺度效应参数、visco-Pasternak 基体参数和环境温度等因素对四边简支 CNTRC 板自由振动特性

的影响。若无特别说明, visco-Pasternak 基体的参数和 CNTRC 板的几何尺寸如表 2 所示; 选取聚甲基丙烯酸甲酯 (polymethylmethacrylate, PMMA) 作为复合材料的连续相, 增强相为单壁碳纳米管 (single-walled carbon nanotubes, SWCNTs), 其温度不相关的材料参数列于表 3。PMMA 和 SWCNTs 的温度相关参数随温度变化的表达式^[33-34]为

$$\begin{cases} E_m = (3.52 - 0.0034T) \\ \alpha_m = 45 \times [1 + 0.0005(T - T_r)] \times 10^{-6} \\ Q_{\text{CNT}}(T) = Q_0(1 + Q_1T + Q_2T^2 + Q_3T^3) \end{cases} \quad (31)$$

其中: E_m 和 α_m 为 PMMA 的杨氏模量和热膨胀系数; Q_{CNT} 表示 SWCNTs 的温度相关参数, $Q_0 \sim Q_3$

为材料常数, 具体数值如表 4^[34] 所示。

表 2 visco-Pasternak 基体的参数和 CNTRC 板的尺寸
Tab.2 Visco-Pasternak substrate parameters and CNTRC plate size

$k_w/(N/m^3)$	$k_c/(N/m)$	$c_t/(N \cdot s \cdot m^{-2})$	L/m	b/m	h/m
2.0266×10^8	66 687 500	141 165	1	1	0.1

表 3 PMMA 和 SWCNTs 的温度不相关材料参数
Tab.3 Temperature-independent material parameters of PMMA and SWCNTs

ν_m	$\rho_m/(kg/m^3)$	ν_{12}^{CNT}	$\rho_{\text{CNT}}/(kg/m^3)$	$f_r^*/\%$
0.34	1 150	0.175	1 400	5

表 4 SWCNTs 的温度相关参数表达式的系数

Tab.4 Coefficients of the temperature-dependent parameter expression for SWCNTs

Q_{CNT}	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3
E_{11}^{CNT}/GPa	6 399.80	6.77899×10^{-1}	1.16097×10^{-3}	6.96636×10^{-7}
E_{22}^{CNT}/GPa	8 021.55	6.75727×10^{-1}	1.15626×10^{-3}	6.93445×10^{-7}
G_{12}^{CNT}/GPa	1 047.55	2.46969×10	4.94831×10^{-3}	3.18224×10^{-6}
$\alpha_{11}^{\text{CNT}}/K$	1.12515×10^{-6}	2.03678×10^{-8}	2.56588×10^{-11}	1.00987×10^{-14}
$\alpha_{22}^{\text{CNT}}/K$	5.43715×10^{-6}	1.81092×10^{-10}	5.33368×10^{-14}	2.29900×10^{-18}

分析结果的合理性与非局部参数 e_0a 的选取密切相关。为标定该参数, 通常通过建立理论解与实验或跨尺度仿真表征数据的定量匹配关系^[35]。结果表明, 该参数的物理量值受工况、构型及多物理场耦合特性的协同作用^[36]。为此, 参数分析成为采用非局部理论研究尺度效应与结构响应关联的通用方法, 其中非局部参数 e_0a 通常设定为 0.1, 下文采用该参数化分析体系。

表 5 列出了四种 CNTs 分布类型在不同非局部参数下对应的 CNTRC 板前两阶无量纲固有频率。无量纲固有频率由实部和虚部构成, 实部用于描述系统的衰减速率和阻尼特性, 负值表明系统稳定^[27,37]; 虚部则代表系统衰减后的固有频率, 表征 CNTRC 板的动刚度特性^[29]。后续研究重点放在 CNTRC 板自由振动的刚度特性上, 即固有频率虚部。不同 CNTs 分布类型下, 无量纲固有频率虚部的大小顺序为: $FG-O < FG-V < UD < FG-X$, 与文献^[25,38]的结论一致。这是由于板的上下表面对其动刚度影响显著, 因此在上

下表面填充更多 CNTs 的结构具有更高的动刚度, 使得 FG-X CNTRC 板的频率虚部最大, 而 FG-O CNTRC 板的频率虚部最小。CNTs 的尺度效应会削弱 CNTRC 板的刚度, 表 5 中考虑这一效应后, 无量纲固有频率虚部有所减小。此外, 非局部参数对 FG-X、FG-O 和 UD 分布方式下 CNTRC 板的无量纲固有频率实部影响较小, 但在 FG-V 分布方式下, 实部绝对值随非局部参数的增加而增大, 这归因于 FG-V 分布的 CNTs 沿 z 轴的不对称特性。后续的分析中, 选取 FG-V 作为 CNTs 的典型分布方式, 以探讨不同参数对 FG-CNTRC 板自由振动特性的影响。

此外, 表 5 还显示无量纲固有频率虚部的下降幅度随结构动刚度的增加而增大。当非局部参数从 0 增至 0.2 时, 不同 CNTs 分布类型下 CNTRC 板无量纲基频虚部的下降幅度分别为: $FG-O (17.52\%) < FG-V (17.63\%) < UD (20.71\%) < FG-X (22.10\%)$ 。这一发现进一步证明了在研究宏观 CNTRC 结构时考虑 CNTs 尺度效应的重要性。

表 5 不同 CNTs 分布类型和非局部参数下 CNTRC 板的无量纲基频

Tab.5 DFF of CNTRC plates under different CNTs distribution types and nonlocal parameters

α	CNTs 分布类型			
	UD	FG-V	FG-X	FG-O
0	-0.411 8 + 3.088 6i	-0.409 6 + 2.641 2i	-0.411 8 + 3.723 4i	-0.411 8 + 2.345 4i
0.05	-0.411 8 + 3.026 9i	-0.409 6 + 2.595 4i	-0.411 8 + 3.644 6i	-0.411 8 + 2.305 1i
0.10	-0.411 8 + 2.866 4i	-0.409 7 + 2.477 1i	-0.411 8 + 3.439 0i	-0.411 8 + 2.200 9i
0.15	-0.411 8 + 2.659 1i	-0.409 9 + 2.326 0i	-0.411 8 + 3.172 4i	-0.411 8 + 2.067 6i
0.20	-0.411 8 + 2.449 0i	-0.410 1 + 2.175 5i	-0.411 8 + 2.900 5i	-0.411 8 + 1.934 5i

图 3 展示了 FG-V CNTRC 板无量纲基频虚部随非局部参数及基体刚度(含弹性层刚度和剪切层刚度)的变化规律,其中 $\text{Im}(\Omega_a)$ 表示无量纲基频虚部, (k_w, k_c) 表示相对表 2 中数值的倍数。从图 3 中可以看出,随着非局部参数的增大,FG-V CNTRC 板的无量纲基频虚部逐渐减小,且减小速度不断加快,表明非局部参数越大,FG-V CNTRC 板的动刚度越低,且动刚度下降梯度与非局部参数呈正相关。

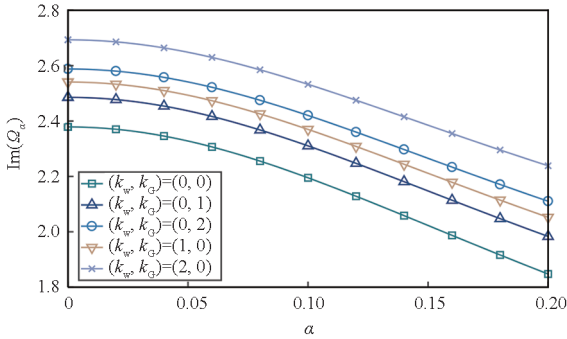


图 3 CNTRC 板在不同非局部参数及基体刚度下的无量纲基频虚部

Fig. 3 Imaginary part of DFF for CNTRC plates under different nonlocal parameters and substrate stiffness

由图 3 还可以观察到,FG-V CNTRC 板的无量纲基频虚部随基体刚度的增加而上升,表明基体支撑作用能够增强 FG-V CNTRC 板的动刚度。同时,由于基体刚度和非局部参数对 FG-V CNTRC 板刚度的影响存在竞争关系,提高基体刚度可以减弱非局部参数对板动刚度的作用。此外,在基体弹性层刚度 k_w 和剪切层刚度 k_c 相对于初始值以相同比例增加时,提升 k_w 对 FG-V CNTRC 板动刚度的增强效果更为显著。

图 4 描绘了 FG-V CNTRC 板无量纲固有频率虚部随温度场和非局部参数的变化趋势。分析表明,温度场和非局部参数对 FG-V CNTRC 板无量纲基频的影响方向一致,均会导致板的动刚度降

低,且刚度下降梯度与温度呈正相关。当环境温度从 280 K 升高至 380 K 时,不同非局部参数下 FG-V CNTRC 板无量纲基频虚部的降幅分别为: 10.21% ($\alpha = 0$)、10.90% ($\alpha = 0.05$)、12.90% ($\alpha = 0.10$)、15.95% ($\alpha = 0.15$) 和 19.71% ($\alpha = 0.20$)。这一现象说明,考虑 CNTs 的尺度效应会显著放大温度场对 FG-V CNTRC 板动刚度的负面作用。

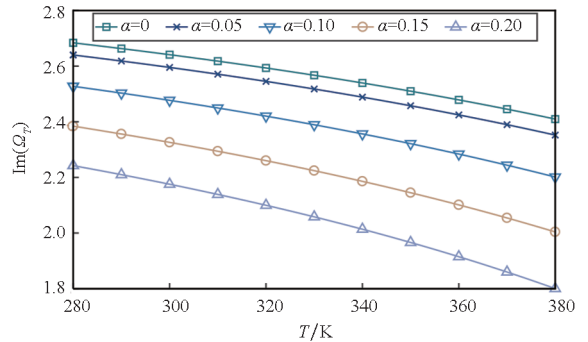


图 4 CNTRC 板在不同温度场和非局部参数下的无量纲基频虚部

Fig.4 Imaginary part of DFF for CNTRC plates under different temperature fields and nonlocal parameters

图 5 展示了 FG-V CNTRC 板无量纲固有频率虚部随 CNTs 体积分数和基体阻尼参数的变化规律,其中基体阻尼参数 $c_1^0 = 141\ 165\ \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ 。从图中可以看出,在不同基体阻尼参数下,当 CNTs 体积分数小于或等于临界值 f_r^{crit} 时,FG-V CNTRC 板无量纲基频虚部为零,表明此时板未发生往复振荡;当 CNTs 体积分数超过 f_r^{crit} 时,无量纲基频虚部随 CNTs 体积分数的增加而上升,但上升速度逐渐减缓,说明 FG-V CNTRC 板的动刚度随 CNTs 体积分数的增加而提高,但增长梯度逐渐减小。此外,临界体积分数 f_r^{crit} 随阻尼参数的增大而增加,这是因为基体阻尼参数会消耗 FG-V CNTRC 板自由振动的能量,而 CNTs 体积分数的增加会提高板的自由振动的能量。因此,阻

尼参数越大,能量耗散越多,对应的临界体积分数也越大。

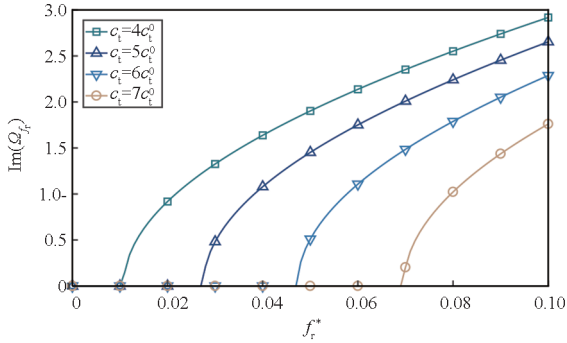


图5 CNTRC 板无量纲基频虚部随 CNTs 体积分数和基体阻尼参数的变化曲线

Fig.5 Variation of the imaginary part of DFF for CNTRC plates with CNTs volume fraction and substrate damping parameters

4 结论

通过将非局部理论与传统 EMT 模型相结合,提出了一种能够有效表征 CNTRC 力学性能的非局部 EMT 理论框架,解决了传统 EMT 模型无法考虑纳米材料尺度效应的局限性。依据 Kirchhoff 理论与 visco-Pasternak 基体模型,运用能量变分原理构建了热-力耦合作用下 FG-CNTRC 薄板固有模态问题分析的控制方程,得到了简支 CNTRC 板的固有频率半解析解。重点分析了尺度效应、纳米增强相的空间特征分布与热-力耦合因素对 CNTRC 板固有频率的影响,得出以下主要结论:

1) 建立的非局部 EMT 本构模型可有效表征纳米增强相尺度效应对 CNTRC 板固有频率特性的影响,为纳米增强复合材料宏观结构的力学响应分析提供了理论框架。

2) 不同 CNTs 分布类型下,板的动刚度大小顺序为:FG-O < FG-V < UD < FG-X。

3) 考虑 CNTs 的尺度效应会显著降低 CNTRC 板的动刚度,同时非局部参数会削弱基体刚度对 CNTRC 板的增强作用。

4) CNTRC 板的动刚度随环境温度的升高而降低,且考虑 CNTs 的尺度效应后,温度场的影响更加显著。

5) 增加 CNTs 体积分数可显著提升 FG-CNTRC 板的动刚度;而增大基体的阻尼参数会提高板开始往复振荡所需的临界体积分数。

参考文献 (References)

[1] CHO J R. Nonlinear free vibration of functionally graded

CNT-reinforced composite plates [J]. Composite Structures, 2022, 281: 115101.

[2] GARG A, BELARBI M O, CHALAK H D, et al. A review of the analysis of sandwich FGM structures [J]. Composite Structures, 2021, 258: 113427.

[3] PASHA A, RAJAPRAKASH B M. Functionally graded materials (FGM) fabrication and its potential challenges & applications [J]. Materials Today: Proceedings, 2022, 52: 413-418.

[4] 贺丹,乔瑞,杨子豪.碳纳米管增强型功能梯度板的屈曲预测[J].复合材料学报,2018,35(10):2804-2812.
HE D, QIAO R, YANG Z H. Buckling analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded composite plates [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2018, 35(10): 2804-2812. (in Chinese)

[5] LAU A K, HUI D. The revolutionary creation of new advanced materials: carbon nanotube composites [J]. Composites Part B: Engineering, 2002, 33(4): 263-277.

[6] THOSTENSON E T, REN Z F, CHOU T W. Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review [J]. Composites Science and Technology, 2001, 61(13): 1899-1912.

[7] NINH D G, HA N H, LONG N T, et al. Thermal vibrations of complex-generatrix shells made of sandwich CNTRC sheets on both sides and open/closed cellular functionally graded porous core [J]. Thin-Walled Structures, 2023, 182: 110161.

[8] CHEN Y, MA Y, PAN F, et al. Research progress in multi-scale mechanics of composite materials [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2018, 39(1): 1-68.

[9] SOBHANIARAGH B, NEJATI M, MANSUR W J. Buckling modelling of ring and stringer stiffened cylindrical shells aggregated by graded CNTs [J]. Composites Part B: Engineering, 2017, 124: 120-133.

[10] CHERAGHBAK A, LOGHMAN A. Magnetic field effects on the elastic behavior of polymeric piezoelectric cylinder reinforced with CNTs [J]. Journal of Applied and Computational Mechanics, 2016, 2(4): 222-229.

[11] ADHIKARI B, SINGH B N. A coupled Mori-Tanaka model and FEM RVE approach for the geometrical nonlinear dynamic response of the FG-CNTRC plate based on a novel shear strain function using isogeometric finite element procedure [J]. Composite Structures, 2022, 280: 114947.

[12] TAHERI M H, MEMARZADEH P. Effect of crack on shear buckling of CNTRC plates [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 229: 107519.

[13] PAK S Y, KIM S Y, LEE D, et al. Micro-macroscopic coupled modeling for the prediction of synergistic improvement on the thermal conductivity of boron nitride and multi-walled carbon nanotube reinforced composites [J]. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2021, 148: 106474.

[14] MINDLIN R D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 1965, 1(4): 417-438.

[15] LLOYD D J. Particle reinforced aluminium and magnesium matrix composites [J]. International Materials Reviews, 1994, 39(1): 1-23.

[16] PHUNG-VAN P, FERREIRA A J M, NGUYEN-XUAN H, et al. An isogeometric approach for size-dependent geometrically nonlinear transient analysis of functionally graded nanoplates [J].

- Composites Part B: Engineering, 2017, 118: 125 – 134.
- [17] MARANDI S M, KARIMIPOUR I. Free vibration analysis of a nanoscale FG-CNTRCs sandwich beam with flexible core: Implementing an extended high order approach [J]. Engineering Structures, 2023, 276: 115320.
- [18] GHORBANPOUR ARANI A, ROUSTA NAVI B, MOHAMMADIMEHR M. Surface stress and agglomeration effects on nonlocal biaxial buckling polymeric nanocomposite plate reinforced by CNT using various approaches [J]. Advanced Composite Materials, 2016, 25(5): 423 – 441.
- [19] AMIR S, VOSSOUGH A R, VOSSOUGH H. Nonlinear magneto-nonlocal vibration analysis of coupled piezoelectric micro-plates reinforced with agglomerated CNTs[J]. Mechanics of Advanced Composite Structures, 2020, 7(1): 109 – 119.
- [20] DAGHIGH H, DAGHIGH V, MILANI A, et al. Nonlocal bending and buckling of agglomerated CNT-Reinforced composite nanoplates [J]. Composites Part B: Engineering, 2020, 183: 107716.
- [21] 吴栋, 雷勇军, 于宝石, 等. 黏弹性基体中 FG-CNTRCs 圆柱壳热振动特性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2023, 50(6): 188 – 198.
- WU D, LEI Y J, YU B S, et al. Analysis on thermal vibration characteristic of FG-CNTRCs cylindrical shell resting on viscoelastic foundation [J]. Journal of Hunan University (Natural Sciences), 2023, 50(6): 188 – 198. (in Chinese)
- [22] 吴栋, 张大鹏, 于宝石, 等. 碳纳米管增强复合材料 Timoshenko 梁弯曲和屈曲行为分析[J]. 国防科技大学学报, 2024, 46(3): 70 – 78.
- WU D, ZHANG D P, YU B S, et al. Bending and buckling behavior analysis of the carbon nanotubes reinforced composites Timoshenko beams [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2024, 46(3): 70 – 78. (in Chinese)
- [23] SHI D L, FENG X Q, HUANG YG Y, et al. The effect of nanotube waviness and agglomeration on the elastic property of carbon nanotube-reinforced composites [J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 2004, 126(3): 250 – 257.
- [24] GARCÍA-MACÍAS E, RODRÍGUEZ-TEMBLEQUE L, SÁEZ A. Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates[J]. Composite Structures, 2018, 186: 123 – 138.
- [25] WANG Z X, SHEN H S. Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite plates in thermal environments [J]. Computational Materials Science, 2011, 50(8): 2319 – 2330.
- [26] NEŠIĆ N, CAJIĆ M, KARLIČIĆ D, et al. Nonlinear vibration of a nonlocal functionally graded beam on fractional visco-Pasternak foundation[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 107: 2003 – 2026.
- [27] KIANI A, SHEIKHKHOSHKAR M, JAMALPOOR A, et al. Free vibration problem of embedded magneto-electro-thermo-elastic nanoplate made of functionally graded materials via nonlocal third-order shear deformation theory [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2018, 29(5): 741 – 763.
- [28] 杨铁亮. 热环境下功能梯度板壳结构振动特性研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2016.
- YANG T L. Research on the vibro-acoustic response characteristics of functionally graded materials plate/shell under thermal environment [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2016. (in Chinese)
- [29] HOSSEINI M, JAMALPOOR A, FATH A. Surface effect on the biaxial buckling and free vibration of FGM nanoplate embedded in visco-Pasternak standard linear solid-type of foundation[J]. Meccanica, 2017, 52: 1381 – 1396.
- [30] HE X Q, NG T Y, SIVASHANKER S, et al. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(9): 1641 – 1655.
- [31] ZHAO X, LEE Y Y, LIEW K M. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free hp -Ritz method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(3/4/5): 918 – 939.
- [32] HASANI BAFERANI A, SAIDI A R, EHTESHAMI H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation[J]. Composite Structures, 2011, 93(7): 1842 – 1853.
- [33] SHEN H S, ZHANG C L. Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates [J]. Materials & Design, 2010, 31(7): 3403 – 3411.
- [34] SOURESHJANI A H, TALEBITOOTI R, TALEBITOOTI M. Thermal effects on the free vibration of joined FG-CNTRC conical-conical shells [J]. Thin-Walled Structures, 2020, 156: 106960.
- [35] ROUDBARI M A, JORSHARI T D, LYU C F, et al. A review of size-dependent continuum mechanics models for micro-and nano-structures [J]. Thin-Walled Structures, 2022, 170: 108562.
- [36] THAI H T, VO T P, NGUYEN T K, et al. A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates [J]. Composite Structures, 2017, 177: 196 – 219.
- [37] HOSSEINI M, BAHREMAN M, JAMALPOOR A. Thermomechanical vibration analysis of FGM viscoelastic multi-nanoplate system incorporating the surface effects via nonlocal elasticity theory [J]. Microsystem Technologies, 2017, 23(8): 3041 – 3058.
- [38] THANG P T, TRAN P, NGUYEN-THOI T. Applying nonlocal strain gradient theory to size-dependent analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 93: 775 – 791.