



国防科技大学学报

Journal of National University of Defense Technology

ISSN 1001-2486,CN 43-1067/T

《国防科技大学学报》网络首发论文

- 题目： 变体飞行器构型-弹道最优匹配方法研究
作者： 武泽平，马帅超，李佳欣，张晓飞，高经纬
收稿日期： 2025-05-19
网络首发日期： 2025-12-09
引用格式： 武泽平，马帅超，李佳欣，张晓飞，高经纬. 变体飞行器构型-弹道最优匹配方法研究[J/OL]. 国防科技大学学报.
<https://link.cnki.net/urlid/43.1067.t.20251209.1048.002>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字符、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

doi: 10.11887/j.issn.1001-2486.25050029

变体飞行器构型-弹道最优匹配方法研究

武泽平¹, 马帅超^{1*}, 李佳欣², 张晓飞³, 高经纬¹

(1. 国防科技大学 空天科学学院, 长沙 湖南 410073; 2. 军事科学院 战争研究院, 北京 100000; 3. 湖南大学 电气与信息工程学院, 长沙 湖南 410073)

摘要: 变体飞行器几何构型调节与飞行程序产生的耦合效应会导致弹道规划设计变量急剧增加等问题。以滑翔变体飞行器为研究对象, 分析变体飞行器构型-弹道耦合特征, 建立了构型-弹道匹配设计模型。提出了变体飞行器气动特性多精度近似建模方法, 构建了考虑构型-弹道耦合效应的变体飞行器动力学方程。基于代理模型与序列二次规划的构型-弹道一体化规划方法开展变体飞行器构型-弹道匹配设计研究, 得到变体飞行器最优弹道下的变体设计方案。变后掠-翼展方案的最大射程规划结果是固定构型方案的 2.16 倍, 变后掠-翼展方案最大射程规划结果是变后掠方案的 1.26 倍, 验证了构型-弹道最优匹配设计方法的有效性, 为未来智能变体飞行器总体设计提供了方法支撑。

关键词: 变体飞行器; 构型-弹道匹配设计; 参数化模型; 改进序列近似优化

中图分类号: V421.1 文献标志码: A

Research on the optimal matching method of configuration and trajectory for morphing aircraft

WU Zeping¹, MA Shuaichao^{1*}, LI Jiaxin², ZHANG Xiaofei³, GAO Jingwei¹

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defence Technology, Changsha 410073, China;
2. War Research Institute, Academy of Military Science, Beijing 100000, China; 3. College of Electrical and Information
Engineering, Hunan University, Changsha 410073, China)

Abstract: The coupling effect between geometric configuration adjustment and flight trajectory generation in morphing aircraft is found to lead to issues such as a sharp increase in trajectory design variables. A gliding morphing aircraft was taken as the research object to analyze the configuration-trajectory coupling characteristics. A configuration-trajectory matching design model was established. A multi-fidelity aerodynamic approximation modeling method for morphing aircraft was proposed, and the dynamic equations considering the configuration-trajectory coupling effect were constructed. Based on a surrogate model and sequential quadratic programming, a configuration-trajectory integrated planning method was developed to conduct the matching design study, resulting in the optimal morphing design scheme under the best trajectory. The maximum range achieved by the variable-sweep-wing-span scheme is 2.16 times that of the fixed-configuration scheme and 1.26 times that of the variable-sweep scheme, thus verifying the effectiveness of the optimal configuration-trajectory matching design method. Methodological support is provided for the overall design of future intelligent morphing aircraft.

Keywords: morphing aircraft; configuration-ballistic matching design; parametric model; improved sequence approximation optimisation

在世界新军事变革和新一轮科技革命推动下, 飞行器装备正面临着由精确化向智能化全面转型的需求。变体飞行器通过机械结构控制自身构型发生变化, 可提升飞行性能并能实现多任务下最优状态飞行^[1]。通过将变体飞行器能够将构型主动变形与飞行弹道进行一体化规划, 可以使其在跨空域、宽速域等多工况下始终保持效率和性能最优^[2]。典型变体飞行器分类如图 1 所示^[3]。

变体飞行器的典型特征是几何构型和时变飞行程序高度耦合, 其弹道规划不仅需要考虑常规飞行控制参数, 还需要考虑其变体参数如翼展、后掠角等几何构型参数动态调节, 构型-弹道耦合效应更加显著, 开展变体飞行器构型-弹道匹配规划将成为提升变体飞行器飞行性能的关键之一^[4]。

以翼展-后掠可变的滑翔飞行器为研究对象,

开展变体飞行器构型-弹道匹配优化设计方法开展研究。

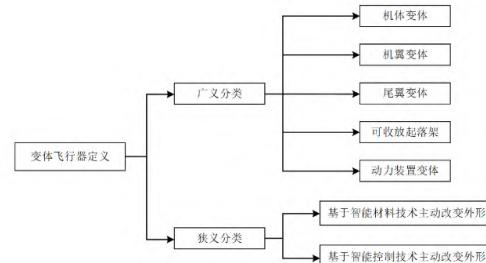


图 1 变体飞行器不同定义分类
Fig.1 Classification of different definitions of morphing aircraft

飞行器弹道规划是指依据飞行器指定任务规划出能够完成任务的弹道, 主要包括间接法和直接法两种^[5-6]。直接法将弹道规划控制量离散后采

收稿日期: 2025-05-19

基金项目: 国家自然科学基金面上资助项目(52375278); 湖南省科技创新计划资助项目(2024RC3142)

第一作者: 武泽平(1990—), 男, 山西吕梁人, 副研究员, 博士, 硕士生导师, E-mail: zeping123@nudt.edu.cn

* 通信作者: 马帅超(2000—), 男, 河南平顶山人, 博士研究生, E-mail: mashuaichao18@nudt.edu.cn

引用格式: 武泽平, 马帅超, 李佳欣, 等. 变体飞行器构型-弹道最优匹配方法研究[J]. 国防科技大学学报,

Citation: WU Z P, MA S C, LI J X, et al. Research on the optimal matching method of configuration and trajectory for morphing aircraft [J]. Journal of National University of Defense Technology,

用参数优化方法进行求解，间接法利用极小值原理将最优控制问题转化为两点边值问题进行求解。直接法相较于间接法具有收敛性好和易于程序实现的优点^[7]。

伪谱法是直接法中的一种常用技术，精度高、计算效率快，已经在多个领域内得到了广泛的应用^[8-9]，但规划速度与精度容易受到状态量初值、离散方法和离散点个数的影响。Huntington^[10]对 Gauss 正交配置法、Radu 正交配置法和 Lobito 正交配置法等三种方法特征开展了对比分析研究，Gauss 正交配置法、Radau 正交配置法可以用微分或积分形式等价表示，而 Lobato 正交配置法的微分形式与积分形式不等价。陆秋秋等^[11]在 Raudu 伪谱法的基础上提出了一种基于 hp-RPM 方法的闭环在线实时制导方法并验证了方法有效性。李怡昕等^[12]在考虑推力调控的条件下基于高斯伪谱法对导弹拦截目标进行了弹道规划，提升了拦截性能。李铁鹏等^[13]提出了一种基于高斯伪谱法的方案弹道优化方法，提升了滑翔增程制导炮弹方案弹道规划能力。张洪倩^[14]采用高斯伪谱法进行弹道规划，并对寻优结果进行仿真验证。杨靖^[15]等提出了一种基于高斯伪谱法的制导火箭弹总体优化设计方法，结果给出了满足约束条件下的最优目标函数值与最优规划弹道。

现有研究主要针对弹道设计开展，变体飞行器在弹道规划的基础上，需要对实时的构型变化进行规划以提升飞行性能。由于其弹道和构型耦合条件下存在气动力和构型、运动状态高度耦合，且设计变量多、构型状态多、非线性程度强等特征，给弹道-构型一体化规划带来一定挑战。

针对上述问题，首先建立了变体飞行器构型-弹道匹配设计的模型，基于变体飞行器总体设计方案分析得到构型弹道匹配设计的目标函数及约束条件，将其转化为多参数最优控制问题。提出了多精度数据融合的变体飞行器气动外形快速计算方法，完成了动力学建模与弹道仿真模型构建。提出了融合代理模型和序列二次规划的变体飞行器构型-弹道一体化规划方法，解决了高斯伪谱法寻优结果易受初值影响的问题。完成了变体飞行器变形动态变后掠、变翼展和飞行攻角一体化优化设计，得到变体飞行器最优构型与飞行方案，通过与固定构型弹道规划方案对比，验证了提出方法的有效性和构型-弹道匹配设计的必要性。

1 变体飞行器构型-弹道匹配设计模型

1.1 变体飞行器总体方案

本文研究对象为滑翔变体飞行器，其任务场景为助推滑翔后入水打击水下目标，全程飞行弹道包括助推段、滑翔段、调姿水态段和水下飞行段。该变体飞行器陆上飞行的三个阶段如图 2 所

示，首先由助推器将其助推至 70km 高度，达到 5Ma 的飞行速度，然后进入变体滑翔段，开始无动力滑翔飞行。滑翔过程中可根据飞行控制指令进行变后掠和变翼展等构型变形。最后，飞行器飞至调整入水姿态点，进入调整入水姿态段，直至以要求速度飞至入水点，完成海上飞行。因变体飞行器在变体滑翔段处于跨空域、宽速域的环境，并且发射点与水下打击目标的距离较远，因此对变体飞行器的射程提出了要求，为了达成飞行性能最优，主要研究滑翔变体飞行器在变体滑翔段无动力飞行过程的构型-弹道一体化规划问题。

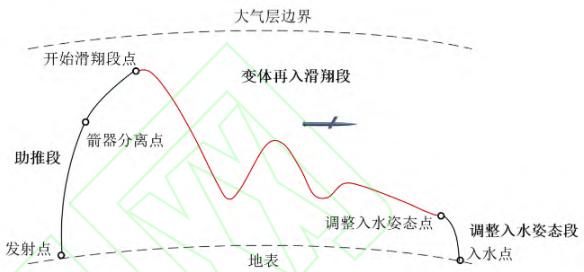


图 2 滑翔变体飞行器弹道示意图
Fig.2 Ballistic schematic of a gliding morphing aircraft

1.2 变体飞行器构型弹道一体化优化建模

变体飞行器弹道规划的目标函数为飞行距离最远。设飞行距离为 J ，则定义 J 为：

$$J = 2R_e \arcsin$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \sin^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} \quad (1)$$

式中， (λ_1, φ_1) 为变体飞行器开始滑翔时的经纬度， (λ_2, φ_2) 为变体飞行器结束飞行时的经纬度， R_e 为地球半径。

变体飞行器在飞行过程中具有空域跨度大，气动耦合严重，气动载荷复杂等特点。飞行器高速飞行过程中发生严重气动加热，因此在进行弹道规划时应充分考虑其表面隔热材料承受热能的能力。同时在高速运动过程中产生的动压也有可能破坏机体的结构强度。飞行过程中也会产生较大的过载，会对飞行器结构与载荷造成影响^[16]。因此在飞行弹道规划过程中应充分考虑热流约束、动压约束和过载约束。因此作如下约束：

设飞行器飞行过程中受到动压为 q ，则其动压约束可设置为：

$$q = \frac{1}{2} \rho(h) v^2 \quad q \leq q_{\max} \quad (2)$$

式中， $\rho(h)$ 为飞行器在海拔高度为 h 时的大气密度， v 为飞行器飞行速度， q_{\max} 为飞行器能承受的最大动压。

设飞行器飞行过程中受到的热流为 Q_s ，则其热流约束可设置为：

$$Q_s = c\sqrt{\rho(h)}v^{k_0} \quad Q_s \leq Q_{s\max} \quad (3)$$

式中, k_Q 为与飞行器外形相关参数, $Q_{s\max}$ 为飞行器能承受最大热流。

设飞行器飞行过程中受到的过载为 n , 考虑飞行器法向过载, 即其受到升力加速度和阻力加速度在纵平面的合成加速度。则其过载约束可设置为:

$$n = F_y \cos(\alpha) + F_x \sin(\alpha) \quad n \leq n_{\max} \quad (4)$$

式中, F_x 为飞行器飞行过程中受到的阻力, F_y 为飞行器飞行过程中受到的升力, α 为攻角, n_{\max} 为飞行器能承受最大过载。

弹道规划的目标函数为飞行射程, 应考虑飞行规划终端点不确定问题, 分别设置终端高度 r_f 、终端速度 v_f 、终端弹道倾角 θ_f 为终端约束, 表示为:

$$\begin{cases} r = r_f \\ v \geq v_f \\ \theta \leq \theta_f \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = v \sin \theta & \dot{\lambda} = \frac{v \cos \theta \sin \sigma}{r \cos \varphi} & \dot{\varphi} = \frac{v \cos \theta \cos \sigma}{r} \\ \dot{v} = -\frac{F_x}{m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \theta + \omega_e^2 r (\cos^2 \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \cos \sigma) \\ \dot{\theta} = \frac{F_y}{mv} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\cos \theta}{v} + \frac{v \cos \theta}{r} + 2\omega_e \sin \sigma \cos \varphi + \frac{\omega_e^2 r}{v} (\sin \varphi \cos \varphi \cos \sigma \sin \theta + \cos^2 \varphi \cos \theta) \\ \dot{\sigma} = \frac{F_z}{mv \cos \theta} + \omega_e^2 r \frac{\sin \varphi \cos \varphi \sin \sigma}{v \cos \theta} + \frac{v \tan \varphi \cos \theta \sin \sigma}{r} - 2\omega_e (\cos \sigma \cos \varphi \tan \theta - \sin \varphi) \end{cases} \quad (7)$$

式中, r 为飞行器质心与地球地心的距离, λ 和 φ 分别为飞行器所处位置的地心经度和纬度, v 为飞行器速度大小, θ 为弹道倾角, σ 为弹道偏角, ω_e 为地球自转角速度, F_x 、 F_y 和 F_z 分别为阻力、升力和侧向力, 其表达式如下:

$$F_{x,y,z} = \frac{1}{2} \rho(h) v^2 S C_{x,y,z} \quad (8)$$

式中, $\rho(h)$ 为飞行高度 h 处大气密度, 通过标准大气值插值计算^[18], S 为飞行器的参考面积, C_x 、 C_y 和 C_z 分别为飞行器在半速度坐标系下的阻力系数、升力系数和侧向力系数, 与变体飞行器飞行状态和构型有关, 表达式为:

$$C_{x,y,z} = f_{Cx,Cy,Cz}(\alpha, \chi, Ma, l) \quad (9)$$

式中, α 为攻角, χ 为后掠角, Ma 为马赫数, l 为翼展。

考虑到式(7)中各个状态量的数量级差别较大, 对上述模型进行无量纲化处理以保证数值计算稳定性^[19], 其中时间、长度、速度、加速度和角速度的无量纲化系数分别为 $t_{nond} = \sqrt{R_0/g_0}$ 、

根据上述分析, 无动力射程最大的优化问题可表示为:

$$\text{find } \alpha(t), \chi(t), l(t)$$

$$\max 2R_e \arcsin \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \lambda_1 - \lambda_2}{2} + \right.} \\ \left. \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \sin^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \quad (6)$$

$$\text{s.t. } q \leq q_{\max}; Q_s \leq Q_{s\max}; n \leq n_{\max}$$

为了求得变体飞行器滑翔飞行过程的射程、过载、动压、热流等参数, 需首先建立考虑构型弹道耦合效应的变体飞行器滑翔段动力学模型。

1.3 考虑构型弹道耦合效应的变体飞行器滑翔段动力学建模

变体飞行器在变体滑翔段主要受重力和气动力, 为了方便描述, 采用半速度坐标系对飞行器弹道进行分析^[17]。假设地球为匀速自转的标准球体, 变体飞行器为面对称几何体, 考虑三自由度动力学方程, 将变体飞行器视为质点, 则半速度坐标系下变体飞行器动力学模型为:

$$R_0 = 6378135 \text{ , } V_{nond} = \sqrt{g_0 R_0} \text{ , } g_0 = 9.8 \text{ 和 } \omega_{nond} = \sqrt{g_0 / R_0}, \text{ 无量纲化后同样采用式(7)中原符号。}$$

在求解变体滑翔飞行器动力学方程时, 飞行器的气动特性数据与控制量和状态量关系密切, 由于引入了翼展和后掠角, 气动计算数据规模急剧增加, 为此, 提出气动特性多精度近似建模方法以降低全剖面气动特性数据计算耗时, 提升设计效率。

1.4 变体飞行器气动特性多精度近似建模

变体飞行器气动仿真计算引入构型控制参数作为设计变量, 导致气动仿真数据维度增高, 设计变量之间耦合效应增强。利用高维模型表征方法(HDMR)能够分解高维模型维度之间耦合作用, 分解得到的子项采用多精度代理模型进行构建, 在确保预测精度的同时缩短了建模耗时。

首先建立变体飞行器几何模型, 其结构由弹头、弹身、机翼、尾舵等部分构成。

弹头部分采用样条点拟合曲线旋转方法建模。

弹身部分采用圆柱体，切割弹体一部分用以保证机翼后掠过程保证弹体流体形状，弹翼选用标准翼型 NACA0010。通过改变尾舵根弦长和尾舵尖弦长的大小来修改尾舵的根梢比。尾舵采用六边形尾舵，布局为十字形。图 3 展示了不同控制量下变体飞行器的外形。

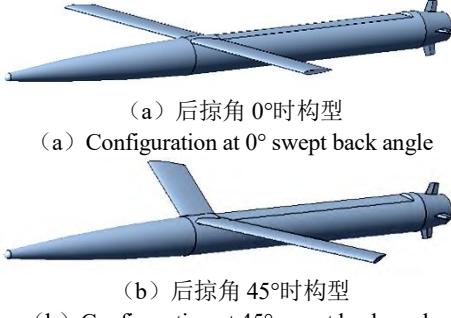


Fig.3 Morphing aircraft configurations at different swept-back angles

变体飞行器参数化模型的参数类型主要包括几何构型参数和变形控制参数。综合考虑变体飞行器机翼可变后掠与伸缩特性，变形控制参数后掠角变化范围为 0~90°，0°时机翼完全展开，90°时机翼折叠至弹身上方，因此翼展长的变化范围应考虑后掠角为 90°时机翼能够完全折叠至弹身上方。其具体参数及其取值范围如表 1 所示。

表 1 变体飞行器几何外形参数表

Tab.1 Table of geometrical shape parameters of morphing aircraft

参数类型	参数名称	取值范围
几何构型参数	弹径/mm	[150,250]
	弹长/mm	[2500,3500]
	翼展/mm	[600,1000]
	翼弦长/mm	[80,130]
	翼位置/mm	[150,200]
	尾舵弦长/mm	[50,80]
	尾舵舵展/mm	[60,100]
变形控制参数	尾舵根梢比	[1,1.5]
	尾舵位置/mm	[20,80]
	翼后掠角/(°)	[0,90]
	翼展/mm	[600,1000]

通过修改其变形控制参数即可展示其不同变体形态下几何外形，同时可以导入 CFD 计算其不同变体形态下的气动特性。

为了解决气动仿真模型维度高的问题，引入 Cut-HDMR 方法构建气动仿真预测模型。其具体描述为：设某一黑箱模型为 $f(X)$ ， $X = [x_1, x_2, \dots, x_d]^T$ ，则可通过 HDMR 展开为：

$$f(X) = f_0 + \sum_{i=1}^d f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq d} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{12\dots d}(x_1, x_2, \dots, x_d) \quad (10)$$

式中， f_0 表示黑箱模型 $f(X)$ 的 HDMR 表达式中的 0 阶子函数， $f_i(x_i)$ 是只包含输入 x_i 的 HDMR 表达式的 1 阶子函数， $f_{ij}(x_i, x_j)$ 是 x_i 和 x_j 共同作用下，考虑了这两个输入值的相关性的 HDMR 表达式中的 2 阶子函数。

一般情况下，只考虑前两阶即可保证模型展开精度，且前两阶的子项表达式为：

$$\begin{aligned} f_0 &= f(X_0) \\ f_i(x_i) &= f(x_i, X_0^{i-}) - f_0 \end{aligned} \quad (11)$$

式中， f_0 为模型在中心点的输出。 (x_i, X_0^{i-}) 表示的是 $(c_1, c_2, \dots, x_i, \dots)^T$ 。即向量中除第 i 维坐标 x_i 外，其余维度的坐标值设置为中心点的值。

HDMR 模型的子项采用基于混合标度的多精度 Kriging 代理模型[20]进行构建，采样方法选用序列采样方法[21-22]，得到的气动预测方法步骤如图 4 所示。

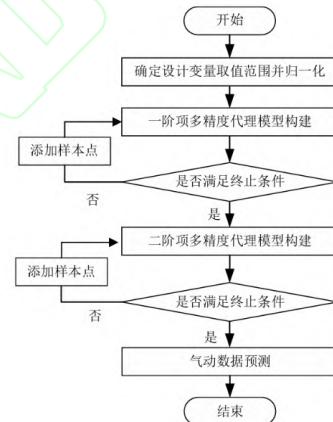


Fig.4 Pneumatic forecasting methodology process
Tab.2 Mathematical example function

序号	维数	函数
1	2	$f_1^H = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$ $x_{1,2} \in [-6, 6]$
2	4	$f_1^L = 0.8f_1^H - 5x_1^2 - 5x_2$ $f_2^H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i)$ $-5 \leq x_i \leq 5, i = 1, \dots, 4$

		$f_2^L = 0.8f_2^H - 0.5\sum_{i=1}^4 x_i$
		$f_3^H = \sum_{i=1}^{10} (x_i - 1)^2 - \sum_{i=2}^{10} x_i x_{i-1}$
3	10	$-100 \leq x_i \leq 100, i = 1, \dots, 10$
		$f_3^L = 0.8f_3^H - 0.5\sum_{i=1}^{10} x_i$
		$f_4^H = \sum_{i=1}^{15} x_i^2$
4	15	$x_i \in [-10, 10]$
		$f_4^L = 0.8f_4^H - 0.5\sum_{i=1}^{15} x_i$
		$f_5^H = \sum_{i=1}^{20} (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$
5	20	$x_i \in [-5.12, 5.12]$
		$f_5^L = 0.8f_5^H - 0.5\sum_{i=1}^{20} x_i$

采用三种代理模型精度评价指标对文章方法进行测试验证^[20], 得到精度评价结果如下表所示:

表 3 多精度近似建模方法验证统计结果
Tab.3 Verification statistical results of multi-precision approximate modelling methods

指标	函数 1	函数 2	函数 3	函数 4	函数 5
复相关系数	0.9871	0.9745	0.9624	0.9612	0.9582
均方根误差	0.1024	0.1052	0.0989	0.1045	0.0902
相对平均绝对误差	0.0678	0.0685	0.0752	0.0754	0.0684

在数学算例验证的基础上, 对变体飞行器进行气动预测, 基于开源软件 OpenVSP^[23]仿真计算低精度样本点输出, 基于 CFD 仿真方法仿真计算高精度样本点输出。由于变体飞行器在飞行过程中变体过程具有连续长周期、缓慢的特点, 流场建立的时间尺度远小于变体的时间尺度, 因此可以忽略非定常因素。基于优化拉丁超立方方法^[24]生成两组均匀的 15 个不同工况下的变体飞行器升力系数、阻力系数进行预测, 相较于 CFD 计算结果, 得到的最大升力系数预测相对误差分别为 9.2%、9.32%, 最大阻力系数预测相对误差分别为 8.8%、8.92%。其统计结果如表 4 所示。预测结果表明, 若对 100 个不同工况下的气动参数进行仿真求解, 仅采用 CFD 方法进行仿真计算需要耗时 150 小时, 采用本文方法建模时长为 60 小时, 计算耗时降低了 60%, 解决了变体飞行器全飞行剖面气动特性快速预示难题。即通过平衡高、低精度气动仿真模型精度与效率的关系, 在完成建模的基础上准确、快速预测出大量气动数据, 从而

提高构型-弹道最优匹配设计效率。

表 4 升、阻力预测统计结果
Tab.4 Statistical results of lift and drag prediction

指标	第一组预测		第二组预测	
	升力系数	阻力系数	升力系数	阻力系数
复相关系数	0.9741	0.9802	0.9784	0.9839
均方根误差	0.0974	0.0901	0.0925	0.0892
相对平均绝对误差	0.0701	0.0689	0.0724	0.0699

2 基于改进高斯伪谱法的构型-弹道规划方法

2.1 变体飞行器构型-弹道规划最优控制问题

变体飞行器构型-弹道一体化规划问题(6)是在满足热流、过载和总加热量条件下, 寻找一组最优的攻角、翼展、后掠角曲线, 是射程最优, 是典型的最优控制问题, 其表达形式主要有 Bolza 形式、Meyer 形式和 Lagrange 形式^[25], 后两种形式可以通过 Bolza 形式简化得到, 因此采用 Bolza 形式进行讨论, 其内容可描述为:

$$J = \Phi[x(t_0), t_0, x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1)$$

式中, $u(t) \in \mathbb{R}^3$ 为控制变量, 包括变体飞行器的攻角 α 、后掠角 χ 和翼展 l , $x(t) \in \mathbb{R}^6$ 为状态变量, t_0 和 t_f 为时间初值和末值, 根据最优控制问题的实际情况确定时间初末值固定或自由。

系统的动力学方程形式如下:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad t \in [t_0, t_f] \quad (12)$$

边界条件为:

$$\phi(x(t_0), t_0, x(t_f), t_f) = 0 \quad (13)$$

路径约束为:

$$C(x(t), u(t), t) \leq 0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (14)$$

根据前文变体飞行器构型-弹道匹配设计模型, 开展变体飞行器构型-弹道规划的最优控制问题可写为:

$$\begin{aligned} \max : & J \\ \text{s.t.} : & \dot{X}(t) = F(X, U, t) \\ & U_l \leq U \leq U_h \\ & X_l \leq X \leq X_h \\ & G_l \leq G \leq G_h \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $X = [r, \lambda, \varphi, v, \theta, \sigma]$, 其具体参量见式(7), $U = [\alpha, \chi, l]$, α 为攻角, χ 为后掠角, l 为展长, $G = [q, Q_s, L]$, 其具体参量见式(2)~(5), U_l 、 X_l 、

G_l 和 U_h 、 X_h 、 G_h 分别为控制量、状态量、过程约束的取值边界。

综上所示, 变体飞行器构型-弹道匹配优化设计可将问题转化为变体飞行器构型-弹道最优控制问题, 通过求解上述最优控制问题, 即可得出构型-弹道匹配设计方案。

2.2 高斯伪谱法

高斯伪谱法以配点法为基础, 将插值多项式基函数的实根作为配点, 对问题中的控制变量和状态变量离散并构造拉格朗日多项式, 实现状态变量和控制变量的全局拟合, 从而将连续空间的最优控制问题转化为非线性规划问题^[15]。连续 Bolza 问题时间区间为 $t \in [t_0, t_f]$, 因此首先需要进行时域变换。

采用一系列高斯-勒让德(LG)点进行离散得到的离散点为 $\tau \in [-1, 1]$, 与连续时间 t 之间的转换关系为:

$$\tau = \frac{2t}{t_f - t_0} - \frac{t_f + t_0}{t_f - t_0} \quad (16)$$

连续 Bolza 问题即转化为:

$$\begin{aligned} J &= \Phi[x(\tau_0), \tau_0, x(\tau_f), \tau_f] \\ &+ \frac{t_f - t_0}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_f} L[x(\tau), u(\tau), \tau] d\tau \\ s.t. : &\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = \frac{t_0 - t_f}{2} f(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) \\ \phi(x(\tau_0), t_0, x(\tau_f), t_f) = 0 \\ C(x(\tau), u(\tau), \tau; t_0, t_f) \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (17)$$

插值点 τ_1, \dots, τ_N 值取为 N 阶勒让德多项式 $P_N(\tau)$ 的根, $P_N(\tau)$ 表达式为:

$$P_N(\tau) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\tau^N} [(\tau^2 - 1)^N] \quad (18)$$

图 5 展示了选取不同 N 的值时配点的分布。

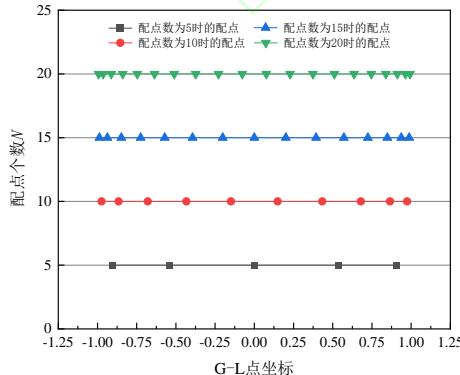


图 5 不同个数下 G-L 点分布示意图

Fig.5 Schematic distribution of G-L points with different number of points

定义 $\tau_0 = -1$, 插值计算得到状态变量和控制

变量的拉格朗日插值多项式为:

$$x(\tau) \approx X(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) x(\tau_i) \quad (19)$$

$$u(\tau) \approx U(\tau) = \sum_{i=0}^N L_i(\tau) u(\tau_i) \quad (20)$$

式中, $L_i(\tau)$ 为一系列拉格朗日插值基函数, 其表达式为:

$$L_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} = \frac{g(\tau)}{(\tau - \tau_i) \dot{g}(\tau)} \quad (21)$$

式中, $g(\tau)$ 为决定插值点的试函数, 且 $g(\tau) = \prod_{i=1}^N (\tau - \tau_i)$ 。

根据拉格朗日插值可得, 状态、控制近似值在插值点处与真值相等, 即 $x(\tau_i) = X(\tau_i), (i = 0, \dots, K)$ 。

上述插值点中并未包含 $\tau_f = 1$, 若不包含此点, 在多数问题求解时无法满足约束条件与状态末值相关的条件, 因此应将状态量 $X_f = X(\tau_f)$ 作为非线性规划中的变量。通过高斯求积的方法, 利用初值 X_0 构造关于 X_f 的约束为:

$$x(\tau_f) = x(\tau_0) + \int_{-\tau_f}^1 f(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (22)$$

其离散形式为:

$$\begin{aligned} X(\tau_f) &= X(\tau_0) - \\ &\frac{\tau_f - \tau_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k f(X(\tau_k), U(\tau_k), \tau; t_0, t_f) \end{aligned} \quad (23)$$

式中, ω_k 为高斯积分的加权系数。

采用 LG 点离散后, 可根据动力学方程得到在 LG 点上需要满足的约束条件, 利用状态插值近似其在 LG 点上的微分, 即:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau_k) &\approx \dot{X}(\tau_k) = \sum_{i=0}^N \dot{L}_i(\tau_k) X(\tau_i) \\ &= \sum_{i=0}^N D_{ki} X(\tau_i) \quad (k = 1, \dots, K) \end{aligned} \quad (24)$$

式中, $D \in \mathbb{R}^{K \times (K+1)}$ 为微分矩阵, 其表达式为:

$$D_{ki} = \dot{L}_i(\tau_k) = \begin{cases} \frac{(1 + \tau_k) \dot{P}_K(\tau_k) + P_K(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_i)[(1 + \tau_k) \dot{P}_K(\tau_i) + P_K(\tau_i)]}, & i \neq k \\ \frac{(1 + \tau_k) \dot{P}_K(\tau_i) + 2 \dot{P}_K(\tau_i)}{2[(1 + \tau_k) \dot{P}_K(\tau_i) + P_K(\tau_i)]}, & i = k \end{cases} \quad (25)$$

式中, $k = 1, \dots, N$ 且 $i = 0, \dots, N$ 。则在 LG 点上对动力学微分方程进行配置的表达式为:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^K D_{ki} X(\tau_i) &= \frac{t_f - t_0}{2} f(X(\tau_k), U(\tau_k), \tau; t_0, t_f) \\ (k = 1, \dots, K) \end{aligned} \quad (26)$$

同理，控制变量采用相同的方法在 LG 点上离散。

最后，针对最优控制问题的目标函数进行处理，状态变量和控制变量的积分逼近可表示为：

$$\int_{-1}^1 f(\tau) d\tau \approx \int_{-1}^1 F(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\tau_i) \quad (27)$$

则目标函数的形式可推导为：

$$J = \Phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i g(X_i, U_i, \tau_i; t_0, t_f) \quad (28)$$

基于上述原理，即看求出离散状态变量 $X_i, (i=0, \dots, N)$ 和控制变量 $U_k, (k=1, \dots, N)$ ，起止时间 $[t_0, t_f]$ ，使得性能指标函数最小，并同时满足在 LG 点上的动力学微分方程配置约束、终端状态约束、边界条件约束和路径约束，如式(29)所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} \min : J = \Phi(X_0, t_0, X_f, t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i g(X_i, U_i, \tau_i; t_0, t_f) \\ s.t. : \sum_{i=0}^K D_{ki} X(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} f(X(\tau_k), U(\tau_k), \tau; t_0, t_f) \\ X(\tau_f) = X(\tau_0) \\ -\frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k f(X(\tau_k), U(\tau_k), \tau; t_0, t_f) \\ \phi(X(\tau_0), t_0, X(\tau_f), t_f) = 0 \\ C(X_k, U_k, \tau_k; t_0, t_f) \leq 0 \end{array} \right. \quad (29)$$

2.3 融合代理模型和 SQP 的变体飞行器构型-弹道一体化规划方法

将变体飞行器弹道最优控制问题离散化后得到的非线性规划问题具有约束性强、优化变量多等特点。并且最优控制问题考虑因素越多，问题复杂程度越高，其对应的非线性规划问题的求解难度越大。SQP 算法在处理强约束非线性规划问题具有较好的能力，在求解小规模问题时收敛速度快，计算精度高。但需要规划的问题变复杂时，SQP 算法求解会提升对初值的依赖性，若初值选取不合理，大大提升计算耗时，并且更容易陷入局部最优。

为了解决 SQP 算法对初值依赖性的问题，结合文献^[26]提出的改进序列近似优化算法，提出融合 SQP 和代理模型的混合弹道规划方法，首先基于改进序列近似优化算法得到满足弹道约束且优化性能较好的弹道，将此解作为高斯伪谱法规划弹道的初始解，流程如图 6 所示。

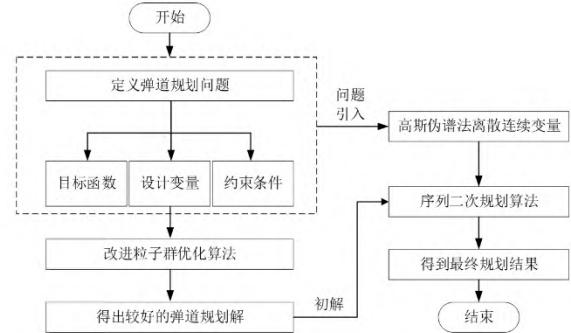


图 6 混合弹道规划方法

Fig.6 Hybrid ballistic planning methods

混合弹道规划方法的具体步骤为：

1) 定义弹道规划问题

根据变体飞行器构型-弹道匹配设计问题确定求解弹道的动力学方程、目标函数及过程约束。定义状态量的初值和末值范围，将控制量攻角、后掠角和翼展作为优化的设计变量并确定其范围。

2) 基于改进序列近似优化算法寻优弹道

采用改进序列近似优化算法寻找性能较好的弹道，使用四阶龙格库塔求解变体飞行器的弹道，并将优化弹道结果的状态量、控制量其作为序列二次规划初解。

3) 基于高斯伪谱法进行弹道离散化

在 LG 点上离散变体飞行器的连续状态量和控制量获得其在离散点处的状态量和控制量，并定义过程约束以及终端约束，得到变体飞行器构型-弹道匹配设计转化的非线性规划问题。

4) 序列二次规划算法得出最优解

确定步骤 3) 中的非线性规划问题的目标、等式约束和不等式约束，基于序列二次规划算法求解得出最优弹道规划结果。

3 变体飞行器构型-弹道匹配规划

采用基于融合代理模型和 SQP 的变体飞行器构型-弹道一体化规划方法对变体飞行器进行构型-弹道匹配规划，找出变体飞行器最优控制方案，提升变体飞行器飞行性能，验证提出方法的有效性。

对变体飞行器进行弹道规划。飞行过程只考虑纵平面飞行情况，即变体飞行器在飞行过程中侧滑角为 0。变体飞行器几何参数设置如表 5 所示。

表 5 变后掠-翼展弹道匹配设计方案参数取值

Tab.5 Control parameter values for variable sweptback-wingspan ballistic matching design scheme

参数类型	参数名称	取值
几何参数	弹径/mm	200
	弹长/mm	3200
	翼弦长/mm	120

	尾舵展长/mm	80
	攻角/(°)	[0,15]
控制参数	后掠角/(°)	[0,90]
	翼展/mm	[600,1000]

仿真条件主要包括设置初始状态参数、终端状态参数取值或范围和控制参数范围。具体值如表 6 所示。

表 6 状态、控制参数设置
Tab.6 Status, control parameter setting

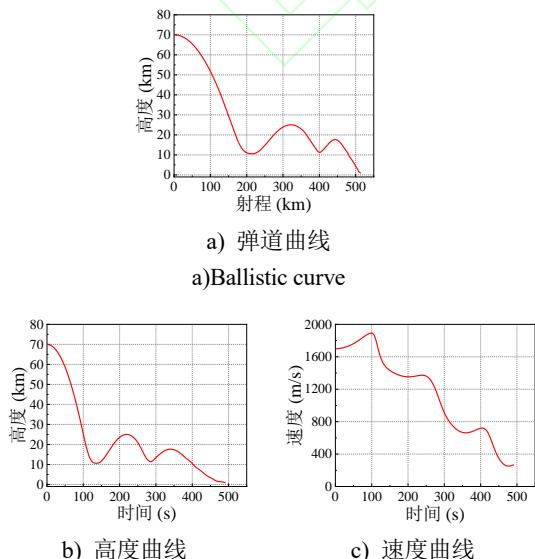
参数类型	参数名称	取值
初始状态参数	初始高度/km	70
	初始速度/Ma	5
	初始经度/(°)	0
	初始纬度/(°)	0
	初始弹道倾角/(°)	0

表 7 离散点处控制量数值
Tab.7 The value of the control quantity at the discrete point

离散点处控制量值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
攻角/(°)	5.99	5.38	5.74	0.64	15	0	15	0	12.06	7.25
后掠角/(°)	0	0.07	18.39	38.32	13.23	5.49	81.02	1.77	9.6	0
翼展/mm	1000	805.2	600	729	600	1000	922.7	910.8	975.8	971.3

将优化得到的连续初解在 LG 配点处进行离散，得到的离散点作为进入序列二次规划的初解进行求解，得到弹道规划的规划结果如图 7 所示。

图 7(a)~(b)分别展示了射程、飞行时间与飞行高度的关系图，图 7(c)~(d)分别展示了飞行速度、速度倾角与飞行时间的关系，图 7(e)~(g)分别展示了三个控制量与飞行时间的关系图。



	初始弹道偏角/(°)	0
终端状态参数	终端高度/km	0.5
	终端速度/Ma	[0.3,1]
	终端经度/(°)	0
	终端纬度/(°)	[2,10]
	终端弹道倾角/(°)	[75,75]
	终端弹道偏角/(°)	0

首先基于改进序列近似优化算法进行初寻优，通过四阶龙格库塔法求解飞行弹道。设 LG 点的个数为 10 个，将在 LG 点上离散的控制参数作为设计变量，以式 1 计算得到的射程为目标函数，考虑飞行过程中的约束条件，将离散量作连续处理用于求解弹道方程。

得到的设计变量攻角的初优解如表 7 所示。其值均为在 LG 点上的取值。

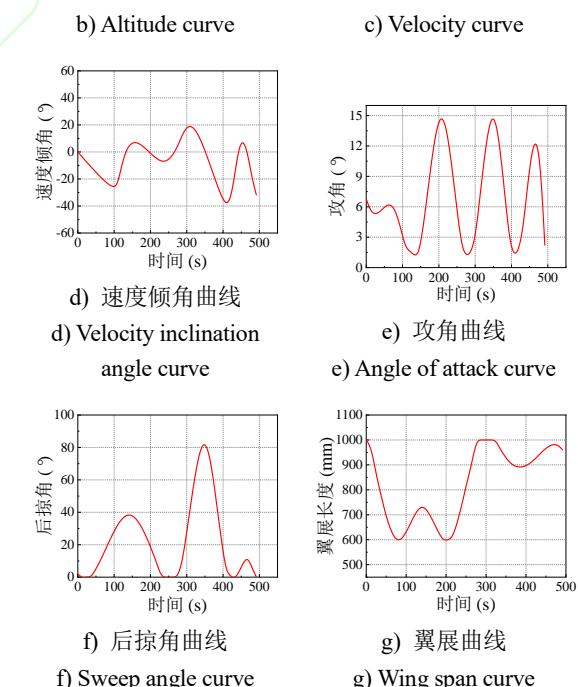


图 7 变后掠弹道规划结果

Fig.7 Finite element model of repaired specimen

变体滑翔飞行器将翼展、后掠角和攻角作为控制量，最终采用改进序列近似优化方法进行初

优化得出飞行器的射程为 497.45km，在经过高斯伪谱法规划后得出最终飞行器的最优射程为 524.33km。通过图 7 中飞行状态量和控制量随时间变化关系可以得出，规划的变体飞行器弹道较为符合设计要求。此外，图中展示的变体随时间变化曲线证实了前文变体缓慢的假设，后掠角最大变化速率为 $0.8(^{\circ})/s$ ，翼展最大变化速率为 $5\text{mm}/\text{s}$ ，因此流场计算过程可以不考虑非定常因素。

为了对比提出方法的先进性，开展无变体方案和变后掠角弹道规划方案的仿真，无变体方案的构型控制参数在飞行过程中均保持初值，变后掠角方案的翼展控制参数在飞行过程中保持初值，其余初始条件均与变体方案相同。得到三种方案的飞行高度与射程曲线如图 8 所示。

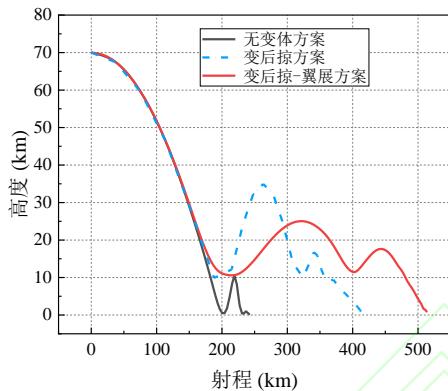


图 8 三种方案规划结果最优射程对比

Fig.8 Stress-strain curve of adhesive epoxy for different days of immersion in water

根据图 8 分析可得，由于飞行器在飞行过程中同时改变后掠角和翼展来改变其气动特性，飞行器在第一次降至 10km 高度时即能进行有效滑翔爬升，由于第一滑翔爬升后变体飞行器剩余速度远大于变后掠角方案，使得变体飞行器后续仍能进行长距离爬升。相较于固定构型方案和变后掠角方案而言，变后掠角-翼展方案弹道规划得出的最优性能通过变体得到了较大的提升。

综上所述，变体飞行器在引入变体控制参数后，其飞行性能相较于传统固定构型方案而言能够得到较大提升，计算结果表明变后掠-翼展方案的最大射程规划结果是不变形方案的 2.16 倍，变后掠-翼展方案最大射程规划结果是变后掠方案的 1.26 倍。由于其在滑翔飞行过程中存在跨空域、跨速域的情况，合适的变体方案能够使飞行器在不同飞行工况条件下改变构型以达到在该工况条件下的最优气动参数外形，从而使得飞行器的性能大幅度提升。

4 结论

变体飞行器构型-弹道设计模型包括变体飞行器弹道规划设计模型、几何构型-质量模型和多

精度气动仿真模型，为下一步变体飞行器弹道规划提供模型基础。在分析变体飞行器构型-弹道耦合特征的基础上，建立的变体飞行器多精度气动仿真模型能够为下一步快速预测变体飞行器气动数据与规划弹道提供模型基础。

变体飞行器构型-弹道匹配优化设计方法能够解决优化初值对序列二次算法影响较大的问题。进行变体飞行器构型-弹道匹配优化设计，得出最优目标函数下的最优变体飞行器构型与控制方案。实现了考虑变体飞行器构型因素的弹道最优规划设计，体现出了构型与弹道的匹配关系。仿真结果表明，无变体方案、只变后掠方案和变后掠-翼展方案的射程逐步提升，变后掠-翼展方案的最大射程规划结果是不变形方案的 2.16 倍，变后掠-翼展方案最大射程规划结果是变后掠方案的 1.26 倍。验证了构型-弹道最优匹配设计方法的有效性，为下一步相关研究提供理论基础。

参考文献(References)

- [1] JOHN V. Morphing aerospace vehicles and structures[M]. Hoboken : John Wiley & Sons, 2012.
- [2] 王鹏, 陈浩岚, 鲍存余, 等. 变形飞行器建模及控制方法研究综述[J]. 宇航学报, 2022, 43(7): 853-865.
WANG P, CHEN H L, BAO C Y, et al. Review on modeling and control methods of morphing vehicle[J]. Journal of Astronautics, 2022, 43(7): 853-865. (in Chinese)
- [3] 陈树生, 贾苜梁, 刘衍旭, 等. 变体飞行器变形方式及气动布局设计关键技术研究进展[J]. 航空学报, 2024, 45(6): 629595.
CHEN S S, JIA M L, LIU Y X, et al. Deformation modes and key technologies of aerodynamic layout design for morphing aircraft: Review[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(6): 629595. (in Chinese)
- [4] 李军府, 艾俊强, 董海锋. 飞机变形技术发展探究[J]. 航空科学技术, 2009, 20(2): 3-6.
LI J F, AI J Q, DONG H F. Research on the development of aircraft morphing technologies[J]. Aeronautical Science and Technology, 2009, 20(2): 3-6. (in Chinese)
- [5] 李国勇. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
LI G Y. Optimal control theory and application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008. (in Chinese)
- [6] CHI X F, LI Q Y, ZHANG X W, et al. Punching trajectory optimization method for warp-knitted vamp based on improved ant colony optimization algorithm and Radau pseudospectral method[J]. Journal of Engineered Fibers and Fabrics, 2021, 16: 1-12.
- [7] GAN W Y, SU L X, CHU Z Z. Trajectory planning of autonomous underwater vehicles based on Gauss pseudospectral method[J]. Sensors, 2023, 23(4): 2350.
- [8] NATEGH M, VAFERI B, RIAZI M. Orthogonal

- collocation method for solving the diffusivity equation: application on dual porosity reservoirs with constant pressure outer boundary[J]. Journal of Energy Resources Technology, 2019, 141(4): 042001.
- [9] ROSS I M, KARPENKO M. A review of pseudospectral optimal control: From theory to flight[J]. Annual Reviews in Control, 2012, 36(2): 182-197.
- [10] GARG D, PATTERSON M, HAGER W W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. Automatica, 2010, 46(11): 1843-1851.
- [11] 陆秋秋, 易文俊. 基于 hp-RPM 的滑翔弹道优化及制导仿真[J]. 兵器装备工程学报, 2021, 42(9): 34-39, 125. LU Q Q, YI W J. Trajectory optimization and guidance simulation of gliding projectile based on hp-RPM[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2021, 42(9): 34-39, 125. (in Chinese)
- [12] 李怡昕, 李旭, 刘少波, 等. 高斯伪谱法在变推力导弹弹道优化中的应用[J]. 现代防御技术, 2019, 47(3): 71-77.
- LI Y X, LI X, LIU S B, et al. Application of Gauss pseudo-spectral method in trajectory optimization of variable thrust missile[J]. Modern Defence Technology, 2019, 47(3): 71-77. (in Chinese)
- [13] 李铁鹏, 王中原, 陈琦, 等. 基于高斯伪谱法的滑翔弹道优化算法研究[J]. 弹箭与制导学报, 2014, 34(2): 113-116.
- LI T P, WANG Z Y, CHEN Q, et al. Study of gliding trajectory optimization algorithm based on Gauss pseudospectral method[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2014, 34(2): 113-116. (in Chinese)
- [14] 张洪倩. 基于高斯伪谱法的弹道优化设计与实现[D]. 南京: 南京理工大学, 2014.
- ZHANG H Q. Ballistic optimization design and implementation based on gauss pseudospectral method [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2014. (in Chinese)
- [15] 杨靖, 毛瑞, 杜凤怀, 等. 基于高斯伪谱法的制导火箭弹总体优化设计研究[J]. 弹箭与制导学报, 2018, 38(5): 23-26.
- YANG J, MAO R, DU F H, et al. Study on system design and optimization for guided rockets using Gauss pseudospectral method[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2018, 38(5): 23-26. (in Chinese)
- [16] 戴慧娜. 飞行器自适应滑模跟踪与多项式预测制导方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2021.
- DAI H N. Research on guidance method of aircraft based on adaptive sliding mode tracking and polynomial prediction[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2021. (in Chinese)
- [17] 韩子鹏, 常思江. 弹箭外弹道学[M]. 2 版. 北京: 北京理工大学出版社, 2022.
- HAN Z P, CHANG S J. Exterior ballistics of projectiles and rockets[M]. 2nd ed. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2022. (in Chinese)
- [18] 陈克俊, 安雪滢. 空天飞行力学[M]. 长沙: 国防科技大学, 2021.
- CHEN K J, AN X Y. Aerospace flight mechanics [M]. Changsha: National University of Defense Technology, 2021. (in Chinese)
- [19] 张延坤. 考虑禁飞区约束的高超声速飞行器再入轨迹规划与制导[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022.
- ZHANG Y K. Reentry trajectory planning and guidance of hypersonic vehicle considering with no-fly zone constraints[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2022. (in Chinese)
- [20] 彭博. 多精度模型驱动的固体发动机优化设计方法研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2021.
- PENG B. Research on multi-fidelity model-driven solid rocket motor optimization[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2021. (in Chinese)
- [21] 武泽平, 王志祥, 张为华. 数据驱动的近似建模方法及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2023.
- WU Z P, WANG Z X, ZHANG W H. Data-driven metamodeling methods and applications[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2023. (in Chinese)
- [22] MA S C, GAO J W, LI J X, et al. A multi-fidelity surrogate model method based on HDMR-Kriging for aerodynamic characteristics prediction of morphing aircraft[C]/Proceedings of Advances in Computational Vision and Robotics, 2024.
- [23] ZHAO H, LIU X B, FLETCHER A H, et al. An open-source framework for coupling non-matching isogeometric shells with application to aerospace structures[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2022, 111: 109-123.
- [24] XU Z X, XIA D Q, YONG N, et al. Hybrid particle swarm optimization for high-dimensional Latin hypercube design problem[J]. Applied Sciences, 2023, 13(12): 7066.
- [25] 邵梦真, 余长君. 最优控制问题的直接法综述[J]. 运筹学学报, 2023, 27(4): 81-105.
- SHAO M Z, YU C J. A survey of direct methods for optimal control problems[J]. Operations Research Transactions, 2023, 27(4): 81-105. (in Chinese)
- [26] 马帅超, 武泽平, 杨家伟, 等. 黑箱模型约束动态松弛的近似优化方法[J/OL]. 国防科技大学学报, 2024 [2025-05-01].
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/43.1067.t.20241021.1308.002.html>.
- MA S C, WU Z P, YANG J W, et al. Approximate optimization method for constraints dynamic relaxation of black box model[J/OL]. Journal of National University of Defense Technology, 2024[2025-05-01].

<https://kns.cnki.net/kcms/detail/43.1067.t.20241021.1308.002.html>.

